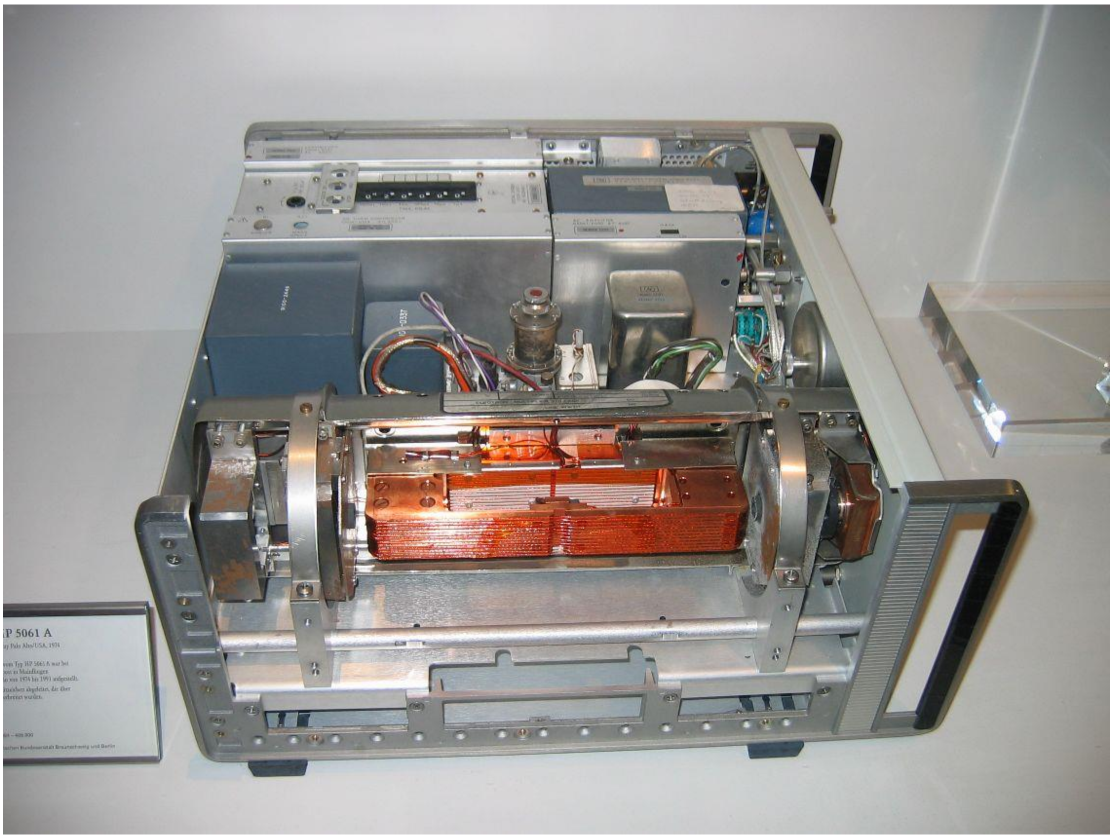
Relativitätstheorie

Alfons Reichert



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Einstein veröffentlichte im Jahre 1905 in den Annalen der Physik seine berühmten Abhandlungen über den Photoeffekt, die Brownsche Molekularbewegung und zur Elektrodynamik bewegter Körper. Letztere wurde später unter dem Titel Relativitätstheorie weltberühmt, für die erste erhielt er 1922 den Nobelpreis. Die Relativitätstheorie war lange Zeit sehr umstritten, erst Mitte des letzten Jahrhunderts fand sie allgemein Anerkennung. Zu abstrus klangen einige ihrer Vorhersagen. Alleine die Bezeichnung Relativitätstheorie ist irreführend. Nach ihr ist keineswegs alles relativ. Relativ sind Größen wie die Masse, die Länge oder die Zeit, da ihr Wert von der Geschwindigkeit abhängt. Nichtrelativ sind alle Invarianten, also Größen, deren Wert in allen Bezugssystemen gleich ist wie der Druck, die Vakuumlichtgeschwindigkeit oder die Wirkung.[1)]

Wie zuerst Maxwell bemerkt hat, muss sich die Zeit ändern, die ein Lichtstrahl braucht, um zwischen zwei Punkten A und B hin und her zu laufen, sobald diese Punkte, ohne den Äther mit sich fortzuführen, gemeinschaftlich verschoben werden. Die Änderung der Zeit ist zwar sehr klein, aber dennoch groß genug, um sie mittels einer empfindlichen Interferenzmethode nachweisen zu können.[2)] Michelson führte den Versuch als erster im Jahre 1881 durch. Er fand keine Spur einer Änderung der Fortpflanzungszeiten. Sein berühmtes Instrument, das Michelson Interferometer, zählt auch heute noch zu den Standardversuchen in der Schulphysik. Lorentz erklärte das negative Ergebnis des Versuches durch die Annahme, dass sich die Weglänge zwischen den beiden Punkten A und B aufgrund der Bewegung verkürzt bzw. verlängert habe, je nachdem, ob sich die Strecke zwischen A und B mit oder entgegen der Drehung der Erde bewegt. Diese Änderungen sollten durch eine Verschiebung der Moleküle durch den Äther verursacht werden.

Einstein löste das Problem auf eine andere Art und Weise. Er stellte zwei Postulate auf, die seiner Meinung nach auf Erfahrung beruhen, mit deren Hilfe er die Beobachtungen erklären konnte. Das erste Postulat, auch Relativitätsprinzip genannt, besagt, dass alle Inertialsysteme zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt sind. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form. Sie gelten absolut unabhängig vom Bezugssystem. Nach dem zweiten breitet sich Licht im Vakuum in allen Inertialsystemen gleichförmig in alle Richtungen aus, unabhängig von der momentanen Bewegung der Lichtquelle. Wegen dieser Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit musste Michelson messen, was er gemessen hat, nichts. Es bleibt als Ergebnis seines Versuches die Tatsache, dass es keinen Äther gibt. Ansonsten ist er für die Relativitätstheorie nicht besonders relevant. Mit den beiden Postulaten konnte Einstein eine Reihe auf den ersten Blick seltsam anmutender Phänomene vorhersagen. In einem bewegten System gehen Uhren langsamer und Längen werden verkürzt. Heute spricht man von Zeitdilatation und Längenkontraktion. Außerdem nimmt die Masse eines Körpers mit seiner Geschwindigkeit zu. Daher können materielle Körper niemals auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Ferner sind Masse und Energie äquivalent. Sie lassen sich in einander umwandeln. Und die Gesamtgeschwindigkeit aus zwei gleich gerichteten Geschwindigkeiten darf nur dann durch einfache Addition ermittelt werden, solange beide sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind. Ansonsten muss man Einsteins Additionstheorem für Geschwindigkeiten anwenden. Alle vorhergesagten Erscheinungen wurden im Laufe der letzten hundert Jahre in mehreren unterschiedlichen Versuchen bestätigt. In letzter Zeit mehren sich jedoch Anzeichen und Versuchsergebnisse, die auf Überlichtgeschwindigkeit einzelner Photonen hindeuten. Ihre Geschwindigkeit unterläge damit statistischen Schwankungen wie bei Elektronen. Dem zweiten Einsteinschen Postulat wäre die Erfahrungsgrundlage entzogen. Damit stellt sich die Frage: Gibt es eine schlüssige alternative Erklärung außerhalb der Relativitätstheorie zum negativen Ausgang des Michelson-Versuchs und der anderen Erscheinungen wie Längenkontraktion, Zeitdilatation usw. Meiner Meinung nach ja, wie ich am Ende der Ausführungen zeigen werde. Sie weist in die gleiche Richtung wie die Deutungen der Quantenmechanik im Skript „Den Quanten auf der Spur“ auf dieser Webseite. In gewisser Weise orientiert sie sich an den Überlegungen Lorentz, kommt jedoch ohne Äther, also ein Trägermedium für elektromagnetische Wellen aus. Den gibt es aufgrund der Ergebnisse des Michelson-Versuchs definitiv nicht. Auch das Relativitätsprinzip wird nicht verletzt. Doch zuvor sollen die wichtigsten Aussagen der Relativitätstheorie ausführlich dargestellt werden, in einer Form, die ich seit dreißig Jahren in zahlreichen Leitungskursen erprobt habe. Dabei muss man nicht jede mathematische Herleitung bis in alle Einzelheiten im Unterricht umsetzen. Viel wichtiger ist es, dass die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Aussagen der mathematischen Gesetzmäßigkeiten anschaulich verstanden haben. Es bringt nichts, sich hinter den mathematischen Formalismen zu verstecken, aber der wesentliche Gehalt rauscht an den Schülerinnen und Schülern vorbei, wobei es ohne die Formalismen sicherlich auch nicht geht. Ich wünsche Ihnen viel Spaß beim Lesen des Skriptes.

Stolberg, im Juli 2014 und im Oktober 2021

2. Grundaussagen

Aus dem Relativitätsprinzip und der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit konnte Einstein eine Reihe von Erscheinungen vorhersagen, die sich im Laufe der folgenden Jahrzehnte durch zahlreiche Experimente als richtig erwiesen haben. Die wichtigsten sind:

- Längenkontraktion
- Zeitdilatation
- Additionstheorem
- Massenzunahme
- Äquivalenz Masse-Energie
- Beziehung Energie-Impuls
- relativistischer Impuls
- relativistische Kraft.

Die wesentlichen Aussagen werden in diesem Kapitel kurz vorgestellt und in den folgenden Kapiteln im Einzelnen hergeleitet.

Besitzt ein Stab im System S_0 die Länge l_0, so gilt für seine Länge l in einem Bezugssystem S, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum System S_0 bewegt:

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Der Stab erscheint dem bewegten Beobachter S verkürzt, da der Faktor unter der Wurzel stets kleiner als 1 ist. Man spricht von Längenkontraktion. Für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, geht der Faktor unter der Wurzel gegen 1 und in beiden Bezugssystemen erscheint der Stab mit der gleichen Länge l_0.

Vergeht im System S_0 die Zeit t_0, so zeigt eine Uhr im System S, dass sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum System S bewegt, die Zeit t an, für die gilt:

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Die Zeit vergeht im System S langsamer, sie hat sich gedehnt, da der Faktor unter der Wurzel stets kleiner als 1 ist. Man spricht von Zeitdilatation. Für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, strebt der Faktor unter der Wurzel gegen 1 und die Uhren messen in beiden Bezugssystemen die gleiche Zeit t_0.

Aus beiden Aussagen zusammen ergibt sich, dass die Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit v der Lichtquelle unabhängig ist. Für die Lichtgeschwindigkeit c_0 im System S_0 gilt:

$$c_0 = \frac{l_0}{t_0}$$

für die Lichtgeschwindigkeit c im bewegten System S

$$c = \frac{c}{t} = \frac{l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}}{t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l_0}{t_0} = c_0.$$

Für die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem spricht auch die Formel, die sich aus den Maxwellschen Gleichungen für c ergibt. Sie lautet:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}}.$$

Darin ist ε_0 die elektrische Feldkonstante und μ_0 die magnetische. Beide sind Naturkonstanten und bezugssystemübergreifend gültig. Das gilt somit auch für c.

Da nach dem zweiten Postulat Geschwindigkeiten größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeiten nicht real sind, kann man Geschwindigkeiten, die in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegen, nicht einfach addieren, da sich sonst Überlichtgeschwindigkeiten ergeben würden. Es gilt vielmehr folgende Gesetzmäßigkeit:

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12} * v_{23}}{c^2}}.$$

Darin bedeuten:

v_{12}: Geschwindigkeit des bewegten Beobachters bezüglich des ruhenden Beobachters
v_{23}: Geschwindigkeit des Körpers bezüglich des bewegten Beobachters
v_{13}: Geschwindigkeit des Körpers bezüglich des ruhenden Beobachters
c: Lichtgeschwindigkeit.

Sind die Geschwindigkeiten v_{12} und v_{23} klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c, so wird der Nenner des Hauptbruches 1 und man erhält die klassische Formel für die Addition der Geschwindigkeiten:

$$v_{13} = v_{12} + v_{23}.$$

Da ein Körper nicht auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann, muss die zugeführte Energie in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit zu einer Massenzunahme führen, denn die kinetische Energie hängt nur von der Masse des Körpers und seiner Geschwindigkeit ab. Besitzt der Körper im System S_0 die Masse m_0, so gilt für seine Masse m im bewegten System S, das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum System S_0 bewegt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Masse eines Körpers nimmt mit der Geschwindigkeit zu. Ist sie sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so ist die Masse in beiden Bezugssystemen gleich der Eigenmasse m_0, da der Faktor unter der Wurzel gegen 1 strebt. Da bei einer Beschleunigung in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit Energie in Masse umgewandelt wird, müssen beide wesensverwandt sein. Das muss sich auch in einer mathematischen Gleichung ausdrücken. Sie ist Einsteins berühmteste Formel und lautet:

$$E = mc^2.$$

Die kinetische Energie eines Körpers ist damit die Differenz aus seiner Gesamtenergie und seiner Ruheenergie. Es gilt:

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2.$$

Setzt man die Formel für die relativistische Masse ein, so ergibt sich:

$$E_{kin} = m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1).$$

Aus der Massenzunahme mit der Geschwindigkeit ergibt sich eine wichtige Beziehung zwischen Energie und Impuls, die in der Elementarteilchenphysik vielfach angewendet wird. Sie lautet:

$$E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4.$$

Die Newtonschen Definitionen für den Impuls und die Kraft bleiben erhalten. Allerdings muss man die Änderung der Masse mit der Geschwindigkeit beachten. Es gilt:

$$p = \frac{m_0 * v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und

$$F = \frac{F_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}.$$

3. Lorentztransformationen

Die zwei Einsteinschen Postulate, das Relativitätsprinzip und die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit fasst man auch unter dem Begriff Lorentzinvarianz zusammen. Mit ihr kann man die Lorentztransformationen herleiten, mit denen man die Orts- und Zeitkoordinaten von einem ruhenden System in ein dazu mit gleichmäßiger Geschwindigkeit v bewegtes System umrechnen, transformieren kann. Sendet eine punktförmige Lichtquelle im ruhenden System S_0 bzw. bewegten System S ein Lichtsignal aus, so breitet es sich kugelförmig um die Quelle aus. Nach der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit gilt für die Radien r_0 und r der Kugeln in Abhängigkeit von den Zeiten t_0 und t:

$$r_0^2 - (c * t_0)^2 = 0$$

und

$$r^2 - (c * t)^2 = 0.$$

Ersetzt man den Radius jeweils durch kartesische Koordinaten und setzt beide Ausdrücke gleich, so folgt:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - (c * t_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (c * t)^2.$$

Diese Gleichung kann nur für beliebige Relativgeschwindigkeiten v der beiden Systeme gelten, wenn man die entsprechenden Ortskoordinaten und die beiden Zeitkoordinaten zu jedem Zeitpunkt ineinander umrechnen kann. Dabei sollen sich die beiden Bezugssysteme der Einfachheit halber nur in x-Richtung gegeneinander bewegen. Man wählt folgende Ansätze:

$$x = k * (x_0 - vt_0)$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0$$

$$t = a * (t_0 - b * x_0).$$

Setzt man sie in die obige Gleichung ein, so folgt nach einigen Umrechnungen:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - (c * t_0)^2 =$$

$$(k^2 - b^2a^2c^2)x_0^2 - 2(k^2v - ba^2c^2)x_0t_0 + y_0^2 + z_0^2$$

$$-(a^2 - k^2v^2/c^2)(c * t_0)^2.$$

Damit diese Gleichung zu jedem Zeitpunkt erfüllt ist, müssen folgende drei Bedingungen gelten:

$$k^2 - b^2a^2c^2 = 1$$

$$k^2v - ba^2c^2 = 0$$

$a^2 - k^2 v^2/c^2 = 1.$

Aus diesen drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhält man nach einiger Rechnung:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$b = \frac{v}{c^2}.$$

Damit lauten die Lorentztransformationen, mit denen man die Koordinaten im Ruhesystem ins bewegte System transformieren kann:

$$x = \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y = y_0$$

$$z = z_0$$

$$t = \frac{t_0 - vx_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Für die Umkehrtransformationen erhält man analog:

$$x_0 = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = z$$

$$t_0 = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

4. Zeitdilatation

Im System S_0 vergehe die Zeit

$$t_0 = t_{02} - t_{01},$$

im System S die Zeit

$$t = t_2 - t_1.$$

Mit Hilfe der Lorentztransformationen aus Kapitel 3 kann man die Zeit vom System S_0 ins System S transformieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} t_0 &= t_{02} - t_{01} \\ &= \frac{\left(t_2 + \frac{v}{c^2}x\right) - \left(t_1 + \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für t

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

In einem Bezugssystem S, das sich relativ zu einem Bezugssystem S_0 bewegt, gehen Uhren langsamer. Man sagt, die Zeit im System S ist gedehnt und spricht von Zeitdilatation. Fliegt ein Astronaut längere Zeit mit großer Geschwindigkeit durchs Weltall und nimmt dabei eine Uhr mit, so läuft diese Uhr langsamer als Uhren, die auf der Erde zurückbleiben, da sich das Raumschiff relativ zur Erde bewegt. Der Astronaut altert weniger als seine Mitmenschen auf der Erde. Man spricht vom Zwillingsparadoxon, weil zwei vor der Reise gleichaltrige Zwillinge nach der Reise nicht mehr gleich alt sind.

Die grundsätzlichen Überlegungen kann man auch mit einer Lichtuhr verdeutlichen[4)]. In ihr dient ein Lichtsignal als Taktgeber, das ständig zwischen zwei Spiegeln hin- und her reflektiert wird. Ruht die Uhr, so läuft das Lichtsignal permanent die Länge der Uhr auf und ab (s. Abb. 1). Jedes Mal, wenn es an einem der beiden Spiegel S ankommt, springt die Anzeige eines Zählers um eine Einheit weiter. Bewegt sie sich, so muss das Licht von einem zweiten Bezugssystem aus betrachtet von einem Spiegel zum nächsten einen längeren Weg zurücklegen, da der Lichtstrahl schräg verlaufen muss. Dafür benötigt er wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mehr Zeit. Es vergehen mehr Zeiteinheiten. Allgemein gilt, wie man aus Abb.1 ablesen kann:

$$c^2t^2 + v^2t_0^2 = c^2t_0^2$$

und damit:

$$c^2t^2 = c^2t_0^2 - v^2t_0^2$$

$$t^2 = t_0^2 - v^2/c^2 * t_0^2$$

$$t^2 = t_0^2 * (1 - v^2/c^2)$$

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

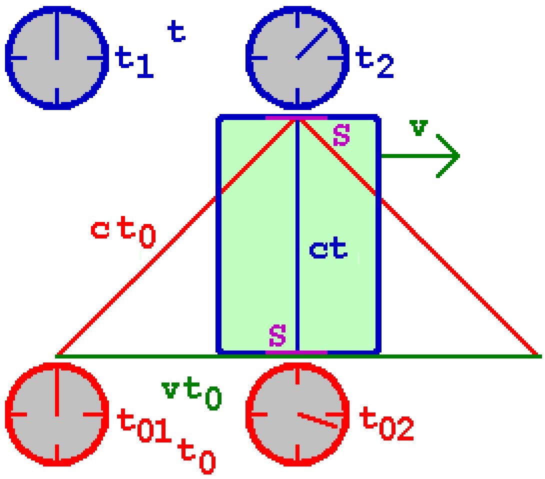


Abb.1: Zeitdilatation

Die Zeitdilatation haben C. Hafele und R. Keating 1971 in einem aufwändigen Versuch überprüft. Sie umkreisten mit Linienmaschinen mehrfach die Erde mit Atomuhren im Handgepäck, die auf t = 1 ps genau gingen. Sie flogen an vielen synchronisierten Atomuhren auf der Erde vorbei. Da ihre Fluggeschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sehr klein war, mussten sie lange fliegen, um einen messbaren Unterschied der Atomuhren auf der Erde und im Flugzeug zu erhalten. Sie errechneten mit der speziellen Relativitätstheorie eine Zeitdilatation von Δt_1 = 250 ns. Da sie in rund 10000 km Höhe kreisten, gingen die Atomuhren aufgrund der geringeren Gravitation nach der allgemeinen Relativitätstheorie um Δt_2 = 200 ns schneller als auf der Erde. Es blieb eine Nettozeitdilatation von Δt = 50 ns übrig. Genau diese Zeitdifferenz haben sie gemessen.

Folgendes Rechenbeispiel macht deutlich, wie klein der Effekt der Zeitdilatation für den Flug ist. Man erhält für die Zeitdilatation mit den oben abgeleiteten Formeln:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_0 - t \\ &= t_0 - t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2} = t_0 * \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) (1) \end{aligned}$$

Da v sehr viel kleiner als c ist, reicht die Genauigkeit eines Taschenrechners nicht aus, um mit dieser Formel einen vernünftigen Wert für Δt zu erhalten. Man muss die Gleichung in eine Taylorreihe entwickeln. Die ersten beiden Glieder lauten für eine beliebige Funktion f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} * x + \ldots$$

Wendet man sie auf die Wurzelfunktion in obiger Formel an und setzt darin

$$x = v^2/c^2$$

so erhält man:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} * (-1) = -\frac{1}{2}\,.$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} * x$$

Damit ergibt sich für die Zeitdilatation für einen Flug mit v = 1000 km/h und einer Flugzeit t_0 = 160 h folgender Näherungswert:

$$\Delta t = t_0 * \left(1 - 1 + \frac{1}{2} * \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= 5{,}76 * 10^5 s * \frac{1}{2} * \frac{(2{,}78 * 10^2 m/s)^2}{(3 * 10^8 m/s)^2} = 247 ns.$$

5. Längenkontraktion

Eine der wesentlichen Folgerungen aus den Lorentztransformationen ist die Längenkontraktion. Ein Stab hat im System S_0 die Länge

$$l_0 = x_{02} - x_{01}.$$

Bewegt sich ein zweites System S relativ zum System S_0 mit der Geschwindigkeit v in Längsrichtung des Stabes, so besitzt er in diesem zweiten Bezugssystem die Länge

$$l = x_2 - x_1.$$

Mit Hilfe der Lorentztransformationen kann man die Länge vom System S_0 ins bewegte System S transformieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} l_0 &= x_{02} - x_{01} \\ &= \frac{(x_2 + vt) - (x_1 + vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für l

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Misst ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, die Länge l eines Stabes, der im Ruhesystem die Länge l_0 hat, so erhält er einen kleineren Wert als ein Beobachter, der die Messung im System S_0 durchführt. Die Länge l_0 des Stabes im System S_0 erscheint vom bewegten System S aus betrachtet verkürzt. Man spricht von Längenkontraktion.

Die Längenkontraktion lässt sich auch mit Hilfe der Formel für die Zeitdilatation ableiten[4)]. Betrachten Sie dazu Abb. 1. Im System S_0 werden zwei synchronisierte Uhren U_1 und U_2 im Abstand l_0 aufgestellt, die permanent die Zeit anzeigen. Sie werden jeweils von einem Beobachter bedient. An den Uhren fliegt eine Rakete mit der Geschwindigkeit v vorbei. Sie hat eine eigene Uhr U an Bord. Die Astronauten starten ihre Uhr, wenn sie U_1 überfliegen. Der 1. Beobachter im System S_0 stoppt in diesem Augenblick die Uhr U_1. Sie zeigt z.B. die Zeit t_{01} = 4 ns an. Die Raumfahrer halten ihre Uhr an, wenn sie die zweite Uhr U_2 passieren, der 2. Beobachter im System S_0 stoppt in diesem Augenblick die Uhr U_2. Sie zeigt die Zeit t_{02} an. Die Astronauten messen als Flugzeit die Zeit t, die Erdbewohner die Zeitdifferenz $t_0 = t_{02} - t_{01}$ zwischen beiden Uhren. Die Astronauten errechnen die Entfernung der beiden Uhren zu

$$l = v * t$$

$$= v * t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$= l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

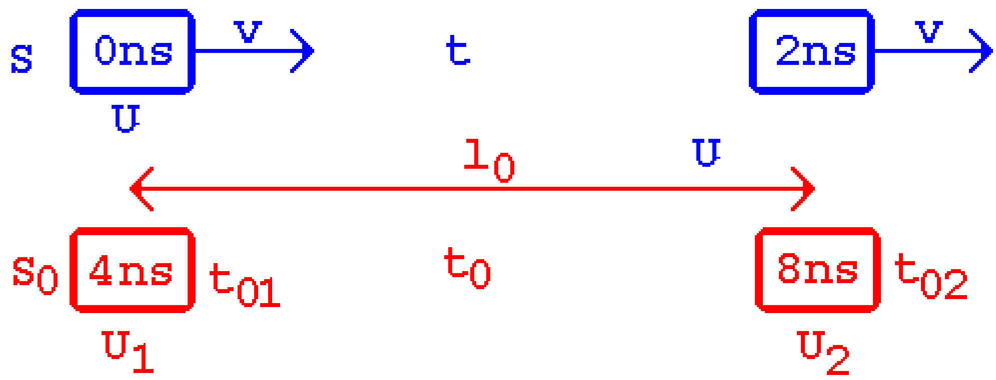


Abb.1: Längenkontraktion

Die Längenkontraktion wurde mit Hilfe von Myonen bestätigt. Sie entstehen in einer Höhe l_0 = 15 km über der Erde und erreichen nahezu Lichtgeschwindigkeit. Ihre Halbwertszeit in ihrem eigenen Bezugssystem S beträgt $T_{1/2}$ = 1,5µs. Etwa 4% der gebildeten Myonen fliegen bis zur Erdoberfläche, bevor sie zerfallen. Nach dem Zerfallsgesetz haben sie in ihrem Bezugssystem S eine Lebensdauer t, für die gilt:

$$t = -\frac{ln\,0,04}{ln\,2} * T_{1/2} = -\frac{ln\,0,04}{ln\,2} * 1{,}5\mu s = 6{,}97\mu s.$$

Damit könnten sie mit Lichtgeschwindigkeit in ihrem eigenen Bezugssystem S maximal die Strecke

$$l = c * t = 3 * 10^8 m/s * 6{,}97 * 10^{-6} s = 2{,}091 km$$

zurücklegen, bevor sie zerfallen sind. Die Strecke l_0 im Erdsystem S_0 erscheint für sie aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit v verkürzt. Daher durchfallen sie bezüglich der Erde die größere Strecke l_0 = 15 km und erreichen so die Erdoberfläche. Aus der oben hergeleiteten Formel für die Längenkontraktion folgt für ihre tatsächliche Geschwindigkeit v:

$$v = c * \sqrt{1 - (l/l_0)^2} = c * \sqrt{1 - (2{,}091km/15km)^2} = 0{,}928c.$$

6. Additionstheorem

Im bewegten System habe ein Körper die Geschwindigkeit v_{23}, das System selbst bewege sich mit der Geschwindigkeit v_{12} bezüglich des Ruhesystems. Nach klassischer Rechnung hat der Körper dann bezogen auf das Ruhesystem die Geschwindigkeit v_{13}, für die gilt:

$$v_{13} = v_{12} + v_{23}.$$

Diese Formel kann man in der Relativitätstheorie nur anwenden, wenn die Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind. In der Nähe der Lichtgeschwindigkeit ergeben sich sonst Überlichtgeschwindigkeiten, die nach den Einsteinschen Postulaten nicht vorkommen. Daher musste Einstein eine neue Formel herleiten, mit der man beliebige Geschwindigkeiten addieren kann, ohne dass sich Geschwindigkeiten größer als c ergeben. Die Ableitung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
v_{13} &= \frac{x_{02} - x_{01}}{t_{02} - t_{01}} \\
&= \frac{x_2 + v_{12}t_2 - (x_1 + v_{12}t_1)}{t_2 + \frac{v_{12}}{c^2}x_2 - (t_1 + \frac{v_{12}}{c^2}x_1)} \\
&= \frac{v_{12}(t_2 - t_1) + x_2 - x_1}{t_2 - t_1 + \frac{v_{12}}{c^2}(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{v_{12} + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{1 + \frac{v_{12}}{c^2}\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}} \\
&= \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + \frac{v_{12} * v_{23}}{c^2}}.
\end{aligned}$$

Sind v_{12} und v_{23} klein gegen c, so geht der Nenner gegen 1 und man erhält die oben angegebene klassische Formel.

7. Kraft und Energie

Zum Thema Äquivalenz Masse und Energie findet man zahlreiche Ableitungen in den Lehrbüchern. Die folgende orientiert sich an der Originalabhandlung Einsteins[2)]. Einstein nimmt an, dass ein Elektron in seinem Ruhesystem S_0 durch eine elektrische Kraft F_0 in Richtung der x-Achse beschleunigt wird. Unterteilt man die Bewegung in kleine Wegabschnitte s_0 und Zeitabschnitte t_0, so kann man die Beschleunigung a_0 innerhalb eines solchen Teilelementes als konstant ansehen. Man digitalisiert gewissermaßen die Bewegung des Elektrons. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt für die Kraft F_0, die man braucht, um das Elektron mit der Masse m_0 im System S_0 aus dem Stand konstant zu beschleunigen

$$F_0 = m_0 * a_0$$
$$= m_0 * \frac{2s_0}{t_0^2}.$$

Dabei ist s_0 der im Ruhesystem zurückgelegte Weg und t_0 die benötigte Zeit. Transformiert man s_0 und t_0 mit den Formeln für die Längenkontraktion und Zeitdilation

$$s_0 = s * \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$t_0 = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ins bewegte System S, so erhält man

$$F_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}^3 * m_0 * \frac{2s}{t^2}$$
$$= \sqrt{1 - v^2/c^2}^3 * m_0 * a$$
$$= \sqrt{1 - v^2/c^2}^3 * F$$

Daraus folgt für die benötigte Kraft F im System S

$$F = \frac{F_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}.$$

Dabei muss man beachten, dass die Strecke s im Bezugssystem S vom System S_0 aus verkürzt erscheint, s_0 folglich kleiner als s ist. Die Zeit t hingegen vergeht im bewegten System S langsamer als im System S_0, so dass t_0 größer als t ist. Man darf die Formel für die Längenkontraktion aus Kapitel 5 nicht rein formal übertragen, sondern muss sie physikalisch korrekt anwenden. Dieser Perspektivwechsel hat jedoch weitreichende Folgen. Energie und Impuls streben gegen unendlich, wenn sich die Geschwindigkeit v der Lichtgeschwindigkeit c nähert. Ohne den Wechsel des Bezugssystems erhält man für beide Größen Formeln, die für v = c einen endlichen Wert liefern, wie ich im Kapitel Anmerkungen näher erläutern werde. Meiner Meinung nach sind sie physikalisch sinnvoller als die von Einstein angegebenen Formeln, zumal aus den Originalableitungen nicht nachvollziehbar hervorgeht, wie Einstein mathematisch zu der Formel für die Kraft gekommen ist. Aus beiden Formeln für die Kraft folgt (s. Kapitel 13), dass im bewegten System S die Kraft, die man aufbringen muss, um das Elektron permanent konstant zu beschleunigen nicht konstant ist, sondern umso größer wird, je schneller das Elektron bereits fliegt. Nach den Newtonschen Axiomen hingegen hängt die beschleunigende Kraft nicht von der Geschwindigkeit ab, die ein Körper bereits hat, wenn man ihn weiter beschleunigt, sondern nur von der Geschwindigkeitszunahme. In der Originalabhandlung Einsteins wird das Elektron zusätzlich zum elektrischen Feld durch ein senkrecht dazu stehendes magnetisches Feld beschleunigt. Die Ableitung wird dadurch komplizierter, da auch Kräfte in y-und z-Richtung auftreten und transformiert werden müssen wegen der Zeitdilatation. Er erhält so zwei verschiedene Massen, eine longitudinale und eine transversale, je nachdem, ob die Kraft eine Geschwindigkeits- oder eine Richtungsänderung bewirkt. Beide Massen sind anders als in der Newtonschen Mechanik nicht gleich. Für die einzelnen Kraftkomponenten erhält er folgende Ausdrücke:

$$F_x = \frac{F_{0x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}$$

$$F_y = \frac{F_{0y}}{1 - v^2/c^2}$$

$$F_z = \frac{F_{0z}}{1 - v^2/c^2}\,.$$

Dieser Unterschied verursacht nach der allgemeinen Relativitätstheorie z.B. die Perihelverschiebung der Ellipsenbahn der Planeten (s. Kapitel 11 Gravitation).

Für die kinetische Energie E_{kin}, die ein Körper erhält, wenn man ihn von null auf die Geschwindigkeit v beschleunigt, gilt mit der klassischen Formel für die Beschleunigungsarbeit als Wegintegral über die Kraft gemäß der Originalableitung Einsteins:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int_0^v F ds \\ &= \int_0^v m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3} * a * ds \\ &= \int_0^v m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3} * \frac{dv}{dt} * ds \\ &= \int_0^v m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3} * v * dv \end{aligned}$$

$$= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]_0^v$$

$$= m_0 c^2 * \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$= mc^2 - m_0 c^2.$$

Nach diesem Ergebnis besitzen auch Körper, die in Ruhe sind, eine Energie, die Ruheenergie. Sie ist umso größer, je größer ihre Masse ist. Die berühmte Einsteinsche Formel für den Zusammenhang zwischen Energie und Masse ist allgemeingültig. Sie lautet:

$$E = mc^2.$$

Ganz so verwunderlich, wie es häufig dargestellt wird, ist diese Erkenntnis nicht. Auch nach der klassischen Formel wird die kinetische Energie größer, wenn die Masse zunimmt. Nach Einstein gilt diese Aussage jedoch nicht nur für die kinetische Energie, sondern für jede Form der Energie. Im Folgenden wird gezeigt, dass für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, die allgemein gültige Einsteinsche Formel in die klassische Formel für die kinetische Energie übergeht. Dazu entwickelt man sie in eine Taylorreihe. Die ersten beiden Glieder lauten für eine beliebige Funktion f(x):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} * x + \ldots$$

Wendet man sie auf die Wurzelfunktion in der Einstein-Formel für die kinetische Energie an und setzt darin

$$x = v^2/c^2$$

so erhält man folgende Ausdrücke

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = (1 - x)^{-1/2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}(1 - x)^{-3/2} * (-1) \ = 1/2$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} * x$$

Überträgt man diese mathematischen Überlegungen auf die Einsteinsche Energieformel, so folgt für die kinetische Energie:

$$E_{kin} = m_0c^2\left(1 + \frac{1 * v^2}{2 * c^2}\right) - m_0c^2$$

$$= \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Sie entspricht der kinetischen Energie eines Körpers der Masse m_0 und der Geschwindigkeit v nach klassischer Rechnung.

8. Massenzunahme

Aus der Ableitung in Kapitel 7 geht hervor, dass die Masse mit der Geschwindigkeit v zunimmt nach folgendem Gesetz:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Diese wichtige Erkenntnis soll auf eine andere Art und Weise noch mal verdeutlicht werden. Das radioaktive Präparat Na-22 liefert schnelle Positronen. In Materie werden sie praktisch ganz abgebremst. Zur Ruhe gekommen, reagiert jedes Positron mit einem Elektron. Dabei verschwinden beide und zerstrahlen vom Ruhesystem S_0 aus betrachtet innerhalb einer kurzen Zeitspanne t_0 in zwei Photonen, die mit Lichtgeschwindigkeit c auseinanderfliegen. Von einem bewegten Bezugssystem S aus beobachtet man das Gleiche. Die Wirkung ist in beiden Systemen gleich. Im bewegten System S dauert der Vorgang des Zerstrahlens wegen der Zeitdilatation eine kürzere Zeitspanne t. Es gilt mit W als Wirkung, m als Masse und E als Energie des Positrons bzw. Elektrons im betreffenden Bezugssystem:

$$W = W_0$$

$$E * t = E_0 * t_0$$

$$2 * m * c^2 * t = 2 * m_0 * c^2 * t_0$$

$$m * t = m_0 * t_0.$$

Mit

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

folgt

$$m * t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 * t_0$$

und daraus

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Masse m nimmt mit der Geschwindigkeit v zu. Bei Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind, ist die bewegte Masse m gleich der Ruhemasse m_0.

Die Zunahme der Masse mit der Geschwindigkeit wurde von zahlreichen Forschern an schnellen Elektronen aus der β–Strahlung und in Teilchenbeschleunigern überprüft, u.a. von Guye und Lavanchy, Kaufmann, Neumann und Schäfer und zuletzt Bertozzi. In Abb. 2 werden die Ergebnisse einiger dieser Versuche mit der theoretischen Kurve (rot) verglichen[3)]. Man sieht, dass die theoretischen und gemessenen Werte in allen Geschwindigkeitsbereichen sehr gut übereinstimmen. Die relativistische Massenzunahme war die erste Gesetzmäßigkeit der speziellen Relativitätstheorie, die experimentell durch Bucherer bereits 1909 bestätigt wurde, vier Jahre nach Einsteins Veröffentlichungen in den Annalen der Physik. Sie begründete Einsteins legendären Ruf als Physiker.

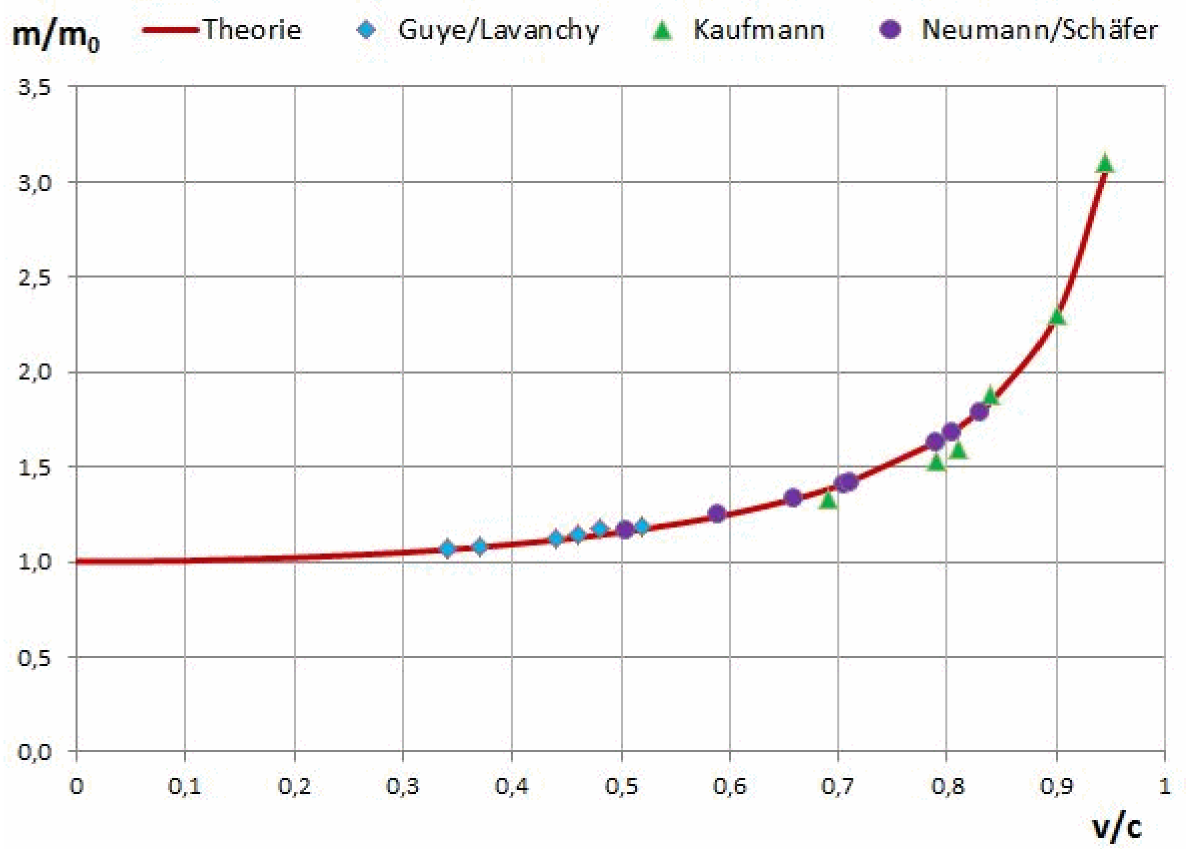


Abb.2: relativistische Massenzunahme mit der Geschwindigkeit

9. Energie und Impuls

Quadriert man die Gleichung für die Massenzunahme aus dem vorigen Kapitel 8 und stellt sie anschließend etwas um, so erhält man:

$$m^2c^2 = m^2v^2 + {m_0}^2c^2.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit c^2, so ergibt sich:

$$m^2c^4 = m^2v^2c^2 + {m_0}^2c^4.$$

Mit

$$E = m * c^2$$

$$p = m * v$$

folgt:

$$E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4.$$

Diese Gleichung wird sehr oft in der Elementarteilchenphysik eingesetzt, um den Impuls neu gebildeter Teilchen zu berechnen.

10. Kraft und Impuls

Für den relativistischen Impuls gilt:

$$p = m * v = \frac{m_0 * v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Für die Kraft erhält man

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 * v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

$$= \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{1}{2} \frac{m_0 v \frac{(-2v)}{c^2} * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2} * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}^2 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m_0 * \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}$$

$$= \frac{m_0 * a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}$$

Diese Formel stimmt mit der Formel aus dem Kapitel Kraft und Energie überein, die Einstein bei der Transformation der Kraft aus dem Ruhesystem ins bewegte System erhalten hat.

11. Gravitation

Eine Uhr U der Masse m_0 umkreist die Erde in einer Höhe h_2 mit der Geschwindigkeit v_2 (s. Abb.1).

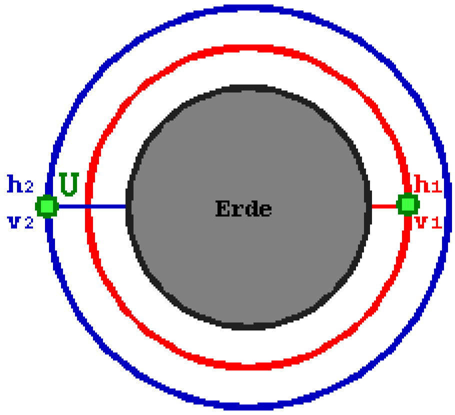


Abb.1: Zeit und Gravitation

Sie fällt auf eine Höhe h_1. Ihre potentielle Energie nimmt ab, ihre kinetische zu. Da die Geschwindigkeit auf v_1 steigt, geht die Uhr aufgrund der Zeitdilatation immer langsamer, je näher sie der Erde kommt. Mit dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$

$$m_1c^2 - m_0c^2 + m_0gh_1 = m_2c^2 - m_0c^2 + m_0gh_2$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + m_0gh_1 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + m_0gh_2$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + gh_1 = \frac{c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} + gh_2$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = gh_2 - gh_1$$

Darin wurden die Formeln für die Massenzunahme und die relativistische kinetische Energie benutzt, die in den Kapiteln „Kraft und Energie“ und „Massenzunahme“ hergeleitet wurden. Wendet man auf die Uhr in beiden Zuständen die Formel für die Zeitdilatation an, so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{t_0}{t_1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{t_0}{t_2}.$$

Darin ist t_0 die Zeit im Ruhesystem der Uhr. Setzt man diese beiden Formeln in die obige Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{c^2 t_0}{t_1} - \frac{c^2 t_0}{t_2} = gh_2 - gh_1$$

$$\frac{c^2 * t_0 * (t_2 - t_1)}{t_1 * t_2} = g * (h_2 - h_1).$$

Setzt man

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta h = h_2 - h_1,$$

und beachtet, dass

$$t_1 * t_2 \cong t_0^2$$

so folgt:

$$\frac{c^2 * \Delta t}{t_0} = g * \Delta h$$

und damit

$$\Delta t = \frac{g * \Delta h * t_0}{c^2}.$$

Die Zeitdifferenz Δt steigt proportional mit dem Höhenunterschied Δh über dem Erdboden und der Bezugszeit t_0 im Ruhesystem der Uhr. 1973 bestätigten Forscher der Universität Maryland (USA) die Überlegungen. Ein Flugzeug mit Atomuhren an Bord kreiste in drei verschiedenen Höhen um rund 10000 m Höhe 15 Stunden lang über einer Uhrengruppe am Boden. Die Uhren am Boden zeigten danach eine um Δt = 47,1 ns geringere Zeit an. Der aus den genauen Flugdaten mit obiger Formel berechnete Wert und der gemessene Wert wichen nur um 1% voneinander ab. Einen Näherungswert erhält man, wenn man die mittleren Flugdaten benutzt. Es ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{9{,}81 m/s^2 * 10000 m * 15 * 3600 s}{(3 * 10^8 m/s)^2}$$

$$= 58{,}9 ns.$$

Bei einer exakten Rechnung müsste man bei der potentiellen Energie berücksichtigen, dass die Masse m mit der Geschwindigkeit v zunimmt und der Ortsfaktor g mit der Entfernung r zum Erdmittelpunkt abnimmt.

Die Abhängigkeit der Zeit einer Lichtuhr von ihrer Position im Gravitationsfeld der Erde lässt sich auch mit Hilfe der Quantenphysik herleiten. Bewegt sich ein Photon von Position 1 nach Position 2 (s. Abb.1) von der Erde weg, so wandelt sich ein Teil seiner Energie in potentielle Energie um. Seine Frequenz sinkt. Diese Erscheinung nennt man Gravitationsrotverschiebung. Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$h * f_1 = h * f_2 + m * g * \Delta h \ (1).$$

Darin ist h das Plancksche Wirkungsquantum, f_1 bzw. f_2 die Frequenz an Position 1 bzw. 2, m die Masse des Photons, g die Erdbeschleunigung und Δh die Höhendifferenz. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Gravitationskraft konstant bleibt. Für die Masse des Photons gilt nach Kapitel 7:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h * f_0}{c^2},$$

mit f_0 als Frequenz in der Schwerelosigkeit. Setzt man diese Gleichung in (1) ein, so folgt:

$$h * f_1 - h * f_2 = \frac{h * f_0 * g * \Delta h}{c^2}$$

und damit

$$\Delta f = (f_1 - f_2) = f_0 * \frac{g * \Delta h}{c^2} (2).$$

Ist die Höhendifferenz zwischen beiden Orten sehr groß, so bleibt die Gravitationskraft nicht konstant und man muss die allgemeine Formel für das Gravitationspotential benutzen. Man erhält dann:

$$\Delta f = f_0 * \frac{\gamma * M}{c^2} * \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Darin ist M die Masse der Erde, γ die Gravitationskonstante und r_1 bzw. r_2 die jeweilige Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt der Erde.

Aus der Näherungsformel (2) kann man die obige Formel für die unterschiedliche Lichtzeit an verschiedenen Orten ableiten, in dem man die Beziehung zwischen Frequenz f und Periodendauer T benutzt. Sie lautet allgemein:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Berücksichtigt man diese Definition in Gleichung 2 ein, so erhält man:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_0} * \frac{g * \Delta h}{c^2}$$

und daraus, in dem man beide Seiten mit T_1, T_2 und T_0 multipliziert

$$T_0 * (T_2 - T_1) = T_1 * T_2 * \frac{g * \Delta h}{c^2}.$$

Da

$$T_2 \cong T_1 \cong T_0$$

folgt:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_0 * \frac{g * \Delta h}{c^2}.$$

Benutzt man den Takt der elektromagnetischen Welle zur Zeitmessung, so muss man die Gleichung mit der Anzahl n der Perioden multiplizieren. Mit:

$$\Delta t = n * \Delta T$$

bzw.

$$t_0 = n * T_0$$

folgt:

$$\Delta t = t_0 * \frac{g * \Delta h}{c^2}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gesetzmäßigkeit überein, die oben für die Lichtzeitdifferenz zwischen zwei verschiedenen Positionen im Gravitationsfeld der Erde ermittelt wurde. Diese Herleitung zeigt, dass das entscheidende Bindeglied zwischen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik die Masse der Photonen ist, was auch immer sie physikalisch bedeutet.

Wandelt sich die gesamte Energie des Photons im Schwerefeld eines Schwarzen Loches mit der Masse M und dem Radius R in potentielle Energie um, so besitzt es keine Frequenz mehr, da die Änderung der Frequenz Δf gleich der ursprünglichen Frequenz f_0 ist. Seine gesamte Information geht verloren. Das bedeutet, dass die Zeit stehen bleibt, da sie um $\Delta t = t_0$ gedehnt wird. Der Energieerhaltungssatz liefert mit γ als Gravitationskonstante:

$$m * c^2 = \frac{\gamma * m * M}{R}.$$

Daraus erhält man für den benötigten Radius R des Schwarzen Loches:

$$R = \frac{\gamma * M}{c^2}.$$

Für materielle Körper mit einer von Null verschiedenen Ruhemasse liefert eine genaue Analyse mit Hilfe der allgemeinen Relativitätstheorie den doppelten Wert für R. Man nennt ihn Schwarzschild- Radius R_S, für den gilt:

$$R_S = 2 * R = \frac{2 * \gamma * M}{c^2}.$$

Karl Schwarzschild (1873- 1916) hatte kurz vor seinem Tod eine Lösung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie gefunden und genau diesen Wert erhalten. Besitzt ein Schwarzes Loch obigen Radius, so kann kein materielles Objekt den Körper verlassen, da seine Fluchtgeschwindigkeit höher als die Lichtgeschwindigkeit sein müsste. Würde sich die Sonne in ein Schwarzes Loch zusammenziehen, so besäße sie einen Schwarzschild-Radius:

$$R_S = \frac{2 * 6{,}67 * 10^{-11}(m^3/kg * s^2) * 1{,}99 * 10^{30} kg}{(3 * 10^8\, m/s)^2} = 2950\, m.$$

Für die Erde ergibt sich ein Schwarzschild-Radius von R_S = 8,8 mm. Dass die Sonne sich bisher nicht in ein Schwarzes Loch verwandelt hat, liegt an den Kernfusionen in ihrem Innern, die sehr viel Energie freisetzen. Sie erzeugen einen Gegendruck gegen die Wirkung der Gravitationskraft. Die Gravitationskraft passt nicht in das Schema der übrigen drei Grundkräfte, da sie nur anziehend, aber niemals abstoßend wirkt. Es gibt nur eine Art Masse und nicht zwei wie z.B. bei elektrischen Ladungen mit positiv und negativ. Außerdem ist sie um viele Zehnerpotenzen kleiner. Dennoch ist sie im Weltall die alles beherrschende Kraft, weil sich die übrigen Kräfte in einem Körper stets selbst kompensieren. Ein elektrisch neutraler Körper enthält gleich viele positive wie negative Ladungen, so dass er nach außen keine Kräfte auf andere Körper ausübt.

Die Formel für den Schwarzschild-Radius R_S lässt sich erstaunlicherweise auch mit den Gesetzen der klassischen Newtonschen Mechanik herleiten. Damit ein Körper die Gravitationsanziehung einer Masse M überwinden kann, muss seine kinetische Energie in der Entfernung R vom Zentrum der Gravitationsquelle mindestens gleich seiner potentiellen Energie in diesem Abstand sein. Somit gilt:

$$1/2 * m * v^2 = \frac{\gamma * m * M}{R}.$$

Setzt man für die Geschwindigkeit v die Lichtgeschwindigkeit c ein, so folgt:

$$1/2 * m * c^2 = \frac{\gamma * m * M}{R_S}$$

und daraus

$$R_S = \frac{2 * \gamma * M}{c^2}.$$

Schwarze Löcher sind nur insofern ein relativistischer Effekt, als die Relativitätstheorie die Lichtgeschwindigkeit als höchste zulässige Geschwindigkeit postuliert. So sagte der britische Naturphilosoph John Mitchell bereits im Jahre 1783 ihre Existenz voraus, in dem er wie oben gezeigt die Gesetze der Newtonschen Mechanik auf die ebenfalls von Newton postulierten Lichtteilchen anwendete [6).

Nach der Quantentheorie kann im Zentrum eines schwarzen Loches keine Singularität existieren. Sinkt sein Durchmesser D unter einen gewissen Wert, so kommt die Heisenbergsche Unschärferelation ins Spiel. Sie lautet in diesem Fall

$$D * p = \hbar$$

Das schwarze Loch mutiert zum Quantenschaum. Dieser Effekt tritt auf, wenn für seinen Radius R gilt:

$$R = \frac{D}{2} = \frac{\hbar}{2p} = \frac{\hbar}{2M * v}\,.$$

In diesem Fall ist die Masse so verdichtet, dass die Geschwindigkeit v gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist. Löst man die Gleichung für den Schwarzschildradius nach der Masse M auf und setzt sie in die obige Formel ein, erhält man

$$R = \frac{\hbar * 2\gamma}{2R * c^2 * c} = \frac{\hbar * \gamma}{R * c^3}.$$

Umstellen nach dem Radius R liefert:

$$R = \sqrt{\frac{\hbar * \gamma}{c^3}} = 1{,}61 * 10^{-35} m.$$

Dieser Wert wird als Plancklänge bezeichnet. Nach der neueren Stringtheorie besteht die Welt aus Strings dieser Länge. Sie kann man sich als offene oder in sich geschlossene Schleifen vorstellen.

Auch Gravitationswellen sind eine Folge dieses Postulates der Relativitätstheorie. Nach Newton wird die Gravitationskraft simultan von der Quelle zum Empfänger übertragen. Sie ist eine Fernwirkung. Nach der Relativitätstheorie hingegen breitet sich das Gravitationsfeld analog zum elektromagnetischen Feld mit Lichtgeschwindigkeit aus. Aus den Feldgesetzen der allgemeinen Relativitätstheorie folgt analog zu den Maxwellschen Feldgleichungen die Existenz von Gravitationswellen als Pendant zu den elektromagnetischen Wellen. Da die Gravitationskraft um viele Zehnerpotenzen geringer ist als die elektromagnetische Kraft, ist die Wirkung von Gravitationswellen sehr gering. Damit man überhaupt einen Effekt nachweisen kann, benötigt man schwarze Löcher, die sich umkreisen und letztendlich fusionieren. Aber auch nach der Newtonschen Mechanik wären Gravitationswellen möglich, wenn man annimmt, dass sich das Gravitationsfeld g mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Analog zu den EM-Wellen eines rotierenden Dipols findet man für die Gravitationswelle zweier Schwarzer Löcher, die im Abstand d umeinander kreisen, in x-Richtung senkrecht zur yz-Rotationsebene folgende Ausdrücke (s. Abb.2) [10):

$$g_y = g_0 * \sin\big(\omega(t - x/c)\big).$$

$$g_z = g_0 * \cos\big(\omega(t - x/c)\big).$$

mit

$$g_0 = \frac{\gamma * M * d * \omega^2}{c^2 * r}$$

Darin bedeuten:

γ: Gravitationskonstante
M: Masse des Schwarzen Loches
d: Durchmesser der Kreisbahn bzw. Achse der Ellipsenbahn
ω: Kreisfrequenz
c: Geschwindigkeit der Gravitationswelle
r: Entfernung Quelle Beobachter
t: Zeit

Ein Beispiel soll verdeutlichen, wie winzig die Effekte solcher Gravitationswellen sind. Zwei Schwarze Löcher zu je M = 5 Sonnenmassen umkreisen sich mit einer Frequenz f = 100 Hz im Abstand d = 30 km. Sie befinden sich in einer Entfernung von r = 1 Milliarde Lichtjahren zur Erde. Dann gelten folgende Werte:

$\gamma = 6{,}67 * 10^{-11}$ m³/(kg*s²)
$M = 1 * 10^{31}$ kg
$d = 3 * 10^{4}$ m
f = 100 Hz
$c = 3 * 10^{8}$ m/s
$r = 9{,}47 * 10^{24}$ m (1 Milliarde Lichtjahre)

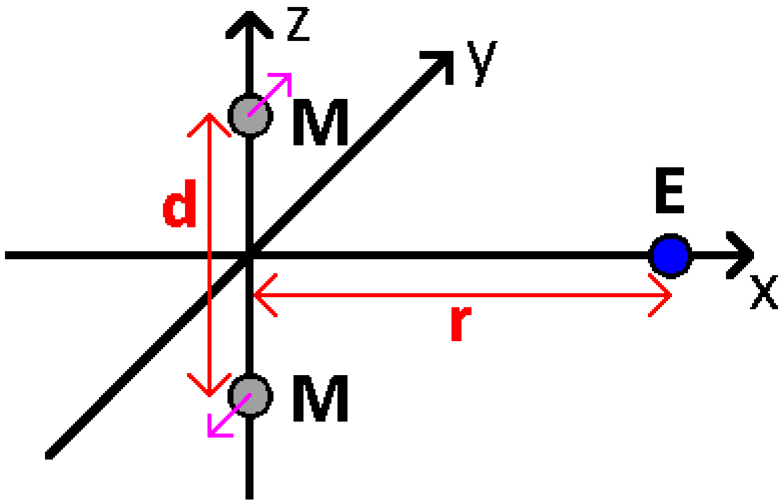


Abb.2: Gravitationswelle

Damit erhält man für die Amplitude g_0 der Gravitationswelle auf der Erde E:

$$g_0 = \frac{\gamma * M * d * \omega^2}{c^2 * r}$$
$$= \frac{6{,}67 * 10^{-11} m^3/(kg * s^2) * 1 * 10^{31}\, kg * 3 * 10^4 m * (6{,}28 * 100\, Hz)^2}{(3 * 10^8 m/s)^2 * 9{,}47 * 10^{24} m}$$
$$= 9{,}25 * 10^{-12}\, m/s^2.$$

Eine solche Gravitationswelle würde Stäbe auf der Erde etwa um den Faktor

$$F = \frac{d}{r} = \frac{3 * 10^4 m}{9{,}47 * 10^{24} m} = 3 * 10^{-21}$$

dehnen oder stauchen. Die Entfernung Sonne-Erde würde durch eine solche Gravitationswelle nur um

$$\Delta l = 1.5 * 10^{11}\, m * 3 * 10^{-21} = 4{,}5 * 10^{-10}\, m$$

schwanken. Das entspricht dem dreifachen Durchmesser eines Wasserstoffatoms und macht deutlich wie winzig die durch Gravitationswellen verursachten Effekte sind und wie schwierig es ist, sie sicher nachzuweisen. Aber sie würden ein zusätzliches Fenster ins Weltall eröffnen, weil sie uns neue Informationen aus der Entstehungszeit des Kosmos liefern würden. Das erklärt, warum so fieberhaft nach ihnen gesucht wird.

Solche astronomischen Ereignisse kann man nicht planen und nicht beliebig wiederholen. Man kann nur geduldig abwarten. Man hofft die Wellen mit Hilfe von riesigen Laser-Interferometern nachweisen zu können, deren Armlänge im Takte der Welle gedehnt und gestaucht wird. Inzwischen wurden sechs solcher Anlagen[7)] in verschiedenen Ländern gebaut mit Armlängen zwischen 600 m und 4000 m. Durch die obige Gravitationswelle würde sie beim längsten Interferometer um

$$\Delta l = l * 3 * 10^{-21} = 4000\, m * 3 * 10^{-21} = 1{,}2 * 10^{-17}\, m$$

verlängert bzw. verkürzt, bei den anderen entsprechend geringer. Das entspricht in etwa dem hundertsten Teil des Durchmessers eines Heliumkerns aus zwei Protonen und zwei Neutronen.

Dennoch sind sich einige Forscherteams sicher, Gravitationswellen im Jahre 2016 endgültig nachgewiesen zu haben. Vorher waren bereits mehrere Versuche gescheitert, z.B. ein Versuch von Josef Weber in Maryland/USA mit Resonanzzylindern aus Aluminium. Taylor und Hulse hatten bis dato Gravitationswellen nur indirekt aus jahrelangen Messungen des Abstandes und der Umlaufdauer des Doppelpulsarsystems PSR 1913+16 erschlossen, wofür sie 1993 den Physik-Nobelpreis erhielten[7)]. Das System verliert Energie, die nur durch Gravitationswellen abgestrahlt werden kann. Dadurch verringert sich ihr Abstand sage und schreibe um Δl = 3,5 m und ihre Umlaufdauer um ΔT = 0,076 ms pro Jahr. Der Abstand der beiden Pulsare schwankt zwischen 1,1 und 4,8 Sonnenradien R_S mit $R_S = 7*10^8$ m, da sie sich auf stark elliptischen Bahnen mit einer Umlaufdauer von T = 7,75 h bewegen.

Eindeutig nachgewiesen ist die Drehung der Ebene der Planetenbahnen, auch Perihelverschiebung genannt. Sie ist beim Merkur am größten und beträgt 574,2 '' pro Jahrhundert, weil seine Bahn die größte Exzentrizität und die größte Bahngeschwindigkeit aller Planeten aufweist. Der überwiegende Anteil wird durch Störungen der Nachbarplaneten hervorgerufen. Aber ein Betrag von ε = 42,9 '' ließ sich damit nicht erklären. Er wird nach der allgemeinen Relativitätstheorie durch den Unterschied zwischen longitudinaler und transversaler Masse der Sonne verursacht. Einstein erhielt für diesen Anteil der Perihelbewegung pro Umlauf folgenden Ausdruck [8)]:

$$\varepsilon = 24\pi^3 * \frac{a^2}{T^2 * c^2 * (1 - e^2)} = 6\pi * \frac{v^2}{c^2 * (1 - e^2)}$$

Darin ist a die große Halbachse der Ellipsenbahn, T die Umlaufdauer, c die Lichtgeschwindigkeit, e die Exzentrizität der Bahn und v die mittlere Bahngeschwindigkeit. Man erkennt, dass die Perihelverschiebung umso größer ist, je größer die Bahngeschwindigkeit und je größer die Exzentrizität der Bahn ist.

Merkur hat folgende Bahndaten [9)]:

$$e = 0{,}2056; a = 5{,}79 * 10^{10}\, m; T = 87{,}97d = 7{,}6 * 10^6 s.$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\varepsilon = 5{,}01 * 10^{-7}.$$

Umrechnen dieses Wertes in Bogensekunden liefert für die zusätzliche Perihelverschiebung pro Umlauf:

$$\varepsilon = \frac{5{,}01 * 10^{-7}}{2\pi} * 360^{\circ} * 3600''/^{\circ} = 0{,}103''.$$

Damit dreht sich die Ebene der Ellipsenbahn in 100 Jahren um

$$\epsilon = 0{,}103'' * \frac{100 * 365{,}25d}{87{,}97d} = 42{,}9''.$$

Dieses Ergebnis stimmt exakt mit dem gemessenen Wert überein. Nach der Newtonschen Theorie könnte eine solche Perihelverschiebung durch eine reale asymmetrische Massenverteilung im Innern der Sonne verursacht werden. Sie müsste dazu wie die Erde die Form eines Rotationsellipsoides haben. Dann müsste ihre Leuchtkraft am Äquator und an den Polen unterschiedlich groß sein. Eine Verschiedenheit der Leuchtkraft in der benötigten Größenordnung konnte bisher nicht nachgewiesen werden. Eine eindeutige Klärung ist sehr schwierig wegen vieler Störfaktoren. Die Sonne wird z.B. von Sonnenbeben erschüttert, so dass ihre Helligkeit wie eine Glocke vibriert. Außerdem ist ihre Oberfläche mit Sonnenflecken bedeckt, die einen Zyklus von elf Jahren durchlaufen. Die genaue Ursache ließe sich nur vor Ort klären, was natürlich völlig illusorisch ist. Beim binären Pulsarsystem PSR 1913+16 beobachteten Taylor und Hulse eine Drehung der Ebene um ε = 4,2 ° pro Jahr in Übereinstimmung mit den Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie [7)].

Da Photonen eine Masse m besitzen, müssen sie im Gravitationsfeld der Masse M um einen Winkel δ abgelenkt werden, wenn sie unter einem Winkel β zu den Feldlinien ins Gravitationsfeld eintreten. Ist die Gravitationswirkung stark genug, so bewegen sie sich stets senkrecht zu den Feldlinien und beschreiben eine Kreisbahn, so dass β = 90° ist. Für den Radius der Kreisbahn gilt nach den Gesetzen der Kreisbewegung:

$$\frac{m * c^2}{r} = \frac{\gamma * m * M}{r^2}$$

und damit

$$r = \frac{\gamma * M}{c^2}.$$

Darin γ die Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und r die Entfernung des Photons vom Mittelpunkt der Gravitationsquelle. Bei noch stärkerer Gravitation stürzen sie spiralförmig in die Masse M. Einstein errechnete mit Hilfe der allgemeinen Relativitätstheorie für die Ablenkung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne den Wert [2)]

$$\delta = \frac{4 * \gamma * M}{R * c^2} \quad (1).$$

mit R als Radius der Sonne. Setzt man die Werte ein, so erhält man:

$$\delta = \frac{4 * 6{,}67 * 10^{-11}\, m^3/(kg * s^2) * 1{,}99 * 10^{30} kg}{6{,}96 * 10^8 m * (3 * 10^8\, m/s)^2} = 8{,}48 * 10^{-6}$$

und damit in Bogensekunden

$$\delta = \frac{8{,}48 * 10^{-6}}{2\pi} * 360^{\circ} \; * 3600''/^{\circ} \; = 1{,}75''.$$

Die Ablenkung hat zur Folge, dass die Winkelabstände von Sternen, deren Licht direkt an der Sonne vorbei zur Erde gelangt, auf der Erde vergrößert erscheinen. Die Messung lässt sich nur während einer totalen Sonnenfinsternis durchführen, da sonst die große Leuchtkraft der Sonne die Fotographie der Sternpositionen unmöglich macht. Zum Vergleich bestimmt man den Abstand der Sterne bei Nacht, wenn ihr Licht nicht durch die Sonne abgelenkt wird. Eine Überprüfung der Formel im Jahre 1916 durch A. S. Eddington bestätigte angeblich die Vorhersage. Eine nachträgliche Kontrolle ergab jedoch, dass die Messwerte fehlerhaft waren und keinerlei nachprüfbare Ablenkung festgestellt werden konnte. Spätere Messungen im Jahre 1952 durch v. Biesbrock ergaben einen Wert von δ = 1,70‘‘± 0,07‘‘, der die Vorhersagen Einsteins voll und ganz bestätigt. Die Messung ist schwierig, da sie durch zahlreiche Faktoren gestört wird, z.B. die atmosphärische Brechung des Lichtes.

Interessanterweise leitete Einstein die Ablenkung der Lichtstrahlen im Schwerefeld der Sonnen zunächst mit Hilfe des Brechungsgesetzes ab [2)]. Dazu musste er annehmen, dass die Geschwindigkeit c‘ der Photonen bei Annäherung an die Sonne mit Φ als Newtonschem Gravitationspotential und c als Lichtgeschwindigkeit außerhalb des Gravitationsfeldes nach der Formel

$$c' = c * \left(1 + \frac{\Phi}{c'^2}\right) \ (2a)$$

zunimmt, womit er in Widerspruch zu seinem eigenen Grundpostulat geriet, dass die Lichtgeschwindigkeit die höchste zulässige Geschwindigkeit ist, wie er selbst bemerkte. So erhielt er für die Ablenkung den Ausdruck

$$\delta = \frac{2 * \gamma * M}{R * c^2} \ (2b),$$

also die Hälfte des mit der allgemeinen Relativitätstheorie berechneten Wertes [2)]. Aus den Gleichungen (1) und (2b) erkennt man, dass die Ablenkung eines Lichtstrahles umso stärker ist, je größer die Masse M der Gravitationsquelle und je kleiner der Abstand R des Photons vom Mittelpunkt der Quelle ist, je näher es folglich am Himmelskörper vorbeifliegt. Wäre die Lichtgeschwindigkeit kleiner, so wäre die Ablenkung größer.

Die Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne kann man auch mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz berechnen. Ihre Richtungsänderung lässt sich mit der Ablenkung eines Asteroiden oder Kometen durch die Sonne oder eines Elektrons durch einen Atomkern vergleichen. Nach Schpolski [9)] gilt gemäß Abb.3 für die Ablenkung des Kometen nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz:

$$tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{m_K * \gamma * M}{R * m_K * v^2} = \frac{\gamma * M}{R * v^2} \ (3)$$

bzw. des Elektrons nach dem Coulombgesetz:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{Z * e^2}{4\pi * \epsilon_0 * R * m_e * v^2} \ (4).$$

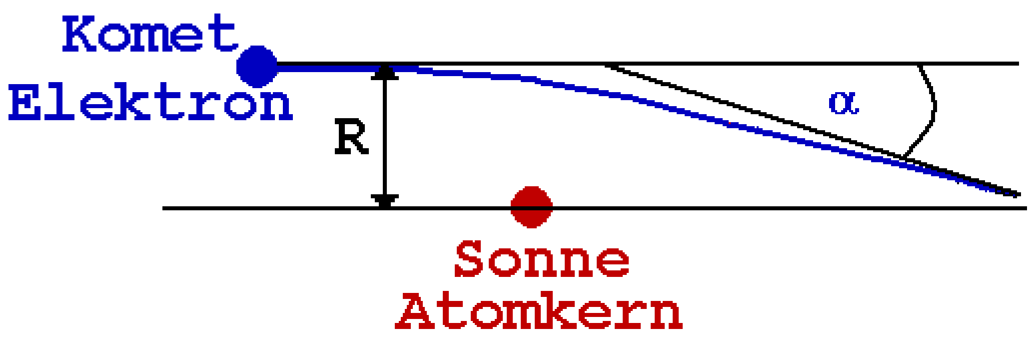


Abb. 3: Ablenkung eines Kometen bzw. Elektrons

Darin ist Z die Kernladungszahl, e die Elementarladung, ε_0 die elektrische Feldkonstante, m_K die Masse des Kometen, m_e die Masse des Elektrons und v die Geschwindigkeit des Kometen bzw. Elektrons. Die restlichen Größen haben die gleiche Bedeutung wie oben, wobei R auch

Stoßparameter genannt wird. Er entspricht der kleinsten Entfernung Komet-Sonne, die der Komet bei seinem Vorbeiflug hätte, wenn er keine Ablenkung erfahren würde (s. Abb. 3).

Da der Stern, der das Licht aussendet, sich hinter der Sonne befindet und somit das Licht zu Beginn nicht senkrecht zu R ins Gravitationsfeld der Sonne eintritt, verdoppelt sich der nach Gleichung (3) berechnete Ablenkungswinkel α, wie die folgende Überlegung zeigt (s. Abb.4).

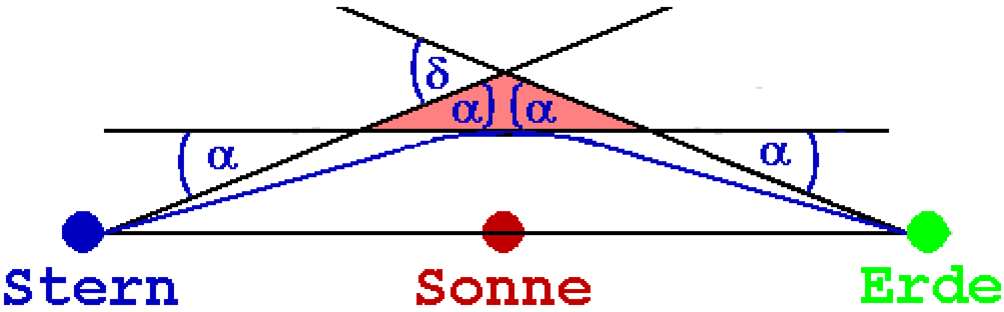


Abb.4: Ablenkung eines Photons durch die Sonne

Im roten Dreieck gilt:

$$180° = 2 * \alpha + 180° - \delta$$

und damit

$$\delta = 2 * \alpha$$

Fliegt der Komet bzw. das Photon nahe an der Oberfläche der Sonne vorbei, so entspricht R dem Radius der Sonne. Analoges gilt für das Elektron im Feld des Atomkerns. Da für kleine Winkel tan α/2 ≈ α/2 ist, erhält man mit Gleichung (3) insgesamt für die Ablenkung der Photonen im Gravitationsfeld der Sonne, wenn man für die Geschwindigkeit v der Photonen die Lichtgeschwindigkeit c einsetzt:

$$\delta = 2 * \alpha = 2 * \frac{2 * \gamma * M}{R * c^2} = \frac{4 * \gamma * M}{R * c^2}.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit Einsteins Formel (1) überein. Anhand der Gleichungen (3) und (4) kann man erkennen, dass für den Ablenkungswinkel α eines Teilchens in einem radialsymmetrischen Feld mit quadratischer Entfernungsabhängigkeit allgemein gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{E_{pot}}{2 * E_{kin}}.$$

Darin ist E_{pot} die potentielle und E_{kin} die kinetische Energie des Teilchens.

Nach Einstein ergibt sich der zusätzliche Faktor 2 in Gleichung (1) gegenüber Gleichung (2b) aus einem Vergleich der Gravitationspotentiale nach der allgemeinen Relativitätstheorie bzw. dem Newtonschen Gravitationsgesetz (s. 2) in der Literarturliste, S. 121 und S. 123). Er rührt daher, „dass die Energie des Gravitationsfeldes in gleicher Weise gravitierend wirken soll wie jegliche Energie anderer Art." (s. 2) in der Literaturliste, S. 112). Dabei spielt ein Faktor æ die entscheidende Rolle, den er an einer Stelle in die Gleichungen einführt, dessen genaue Bedeutung meiner Meinung nach jedoch unklar bleibt. Der Unterschied in beiden Gravitationspotentialen wird nach Meinung anderer Autoren[11), 12)] vereinfacht ausgedrückt dadurch hervorgerufen, dass den Photonen der radiale Abstand R zum Sonnenmittelpunkt wegen der relativistischen Längenkontraktion verkürzt erscheint, weil sie durch die Fallbewegung im Gravitationsfeld der Sonne eine radiale Geschwindigkeit v erlangen. Allerdings müsste ihre Radialgeschwindigkeit nach dem Gesetz der Längenkontraktion

$$\frac{R}{2} = R * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v = 0{,}866\ c$$

betragen, was sehr unrealistisch klingt, wenn man sie mit der Geschwindigkeitszunahme Δc vergleicht, die sich bei klassischer Rechnung ergibt. Dann gilt nach Gleichung 2a

$$\Delta c = c' - c = c * \left(1 + \frac{\Phi}{c'^2}\right) - c = \ c * \frac{\Phi}{c'^2} = c * \frac{\gamma * M}{R * c'^2}.$$

Setzt man die Werte ein, wobei man c' näherungsweise gleich c annimmt, so erhält man

$$\Delta c = 2{,}12 * 10^{-6}\ c,$$

also einen um mehr als fünf Zehnerpotenzen kleineren Wert als nach der relativistischen Rechnung, obwohl der Ablenkungswinkel sich in beiden Fällen nur um den Faktor 2 unterscheidet. Außerdem ist der Wert des Faktors unabhängig davon, in welcher Entfernung R die Photonen die Sonne passieren, obwohl die Raumkrümmung mit dem Abstand zum Sonnenmittelpunkt abnimmt. Kurz gesagt, nach relativistischer Lesart sollte der zusätzliche Faktor 2 entstehen, weil der Raum um die Sonne nach Einstein gekrümmt, nach Newton eben ist. Das kann aber größenordnungsmäßig kaum sein, wie die kleine Überschlagsrechnung zeigt. Der Raum im Gravitationsfeld der Sonne ist viel zu wenig gekrümmt.

Der Unterschied in den beiden Ergebnissen in Gleichung (1) und (2b) liegt meiner Meinung nach in der Formel (2a) für die Geschwindigkeitszunahme begründet. Sie lautet allgemein:

$$c' = c * \left(1 + \frac{E_{pot}}{E_{kin}}\right).$$

Legt man Einsteins Formel für die kinetische Energie der Photonen

$$E_{kin} = m * c'^2$$

und Newtons Gravitationspotential Ø zugrunde, erhält man für die Geschwindigkeit c' Gleichung (2a). Darin werden klassische und relativistische Überlegungen vermischt. Geht man von den klassischen Formeln für die kinetische und die potentielle Energie aus, so folgt:

$$c' = c * \left(1 + \frac{2 * \Phi}{c'^2}\right)$$

und damit für den Ablenkungswinkel

$$\delta = \frac{4 * \gamma * M}{R * c^2}\,.$$

Diese Überlegung ist insofern nicht ganz abwegig, da die Geschwindigkeit der Photonen in radialer Richtung sehr gering ist und ihre radiale kinetische Energie somit nach beiden Rechnungsarten fast identisch ist. Das gleiche Ergebnis für die Geschwindigkeit c‘ und damit für den Ablenkungswinkel δ erhält man, wenn man von Einsteins Formeln für die kinetische Photonenenergie und das Potential ausgeht, da beide nur um den Faktor 2 größer sind als nach Newton. Die klassische und die relativistische Sichtweise sind äquivalent, wenn man sie jeweils konsequent anwendet.

12. Aufgaben

1) Stellen Sie die besonderen Effekte der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie zusammen. Benutzen Sie dazu das Buch, das in der Schule gezeigte Video und die Videos: „Das Geheimnis der Zeit Einsteins Relativitätstheorie 1-3“ auf der Internetseite www.youtube.com. Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie.

2) Diskutieren Sie, welcher Versuch die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie bildet. Sehen Sie sich dazu das Video „Erweitertes Michelson-Morley-Experiment 2009 Deutsche Version“ unter www.youtube.com und die Beschreibung im Buch an. Erläutern und erklären Sie den Aufbau, die Durchführung und das Ergebnis des Versuches.

3) Erläutern Sie die Aussagen der Lorentztransformationen. Leiten Sie aus ihnen die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit her.

4) Stellen Sie die Gesetze für folgende Effekte der speziellen Relativitätstheorie auf:
   a) Additionstheorem der Geschwindigkeiten
   b) Massenzunahme
   c) Längenkontraktion
   d) Zeitdilatation
   e) Äquivalenz Masse/Energie
   f) relativistische kinetische Energie.

5) Leiten Sie die Formel für die relativistische Addition der Geschwindigkeiten her. Ziehen Sie das Kapitel Additionstheorem zu Rate. Berechnen Sie die Summe der beiden Geschwindigkeiten relativistisch für folgende Fälle:

   a) $v_1 = 2/3\ c$, $v_2 = c$,
   b) $v_1 = c$, $v_2 = c$ und
   c) $v_1 = 3/4\ c$, $v_2 = 3/4\ c$.

6) Ein Elektron bewegt sich so schnell, dass sich seine Masse verdoppelt.
   a) Berechnen Sie seine Geschwindigkeit.
   b) Berechnen Sie die benötigte Beschleunigungsspannung.
   c) Berechnen Sie seine Geschwindigkeit nichtrelativistisch.

7) Ein Objekt der Länge $l = 10$ m bewegt sich $t = 10$ s mit einer Geschwindigkeit $v = 2/3\ c$. Berechnen Sie für diesen Fall die Längenkontraktion und die Zeitdilatation.

8) Bei der Satellitennavigation mit GPS muss die Zeitabweichung zwischen den Uhren an Bord der Satelliten und den Uhren am Boden unbedingt beachtet werden, weil es sonst zu Ortsabweichungen von mehreren Kilometern kommen kann. Erklären Sie.

9) Ein Langstreckenflug von Frankfurt nach Buenos Aires dauert etwa $t = 12$ Stunden bei einer mittleren Reisegeschwindigkeit $v = 900$ km/h und einer mittleren Flughöhe $h = 10000$m. Berechnen Sie, um wieviel eine Person an Bord langsamer oder schneller altert als ein Mensch, der auf dem Boden geblieben ist.

10) In einem Blitz werden Elektronen mit einer Spannung U = 100 MV beschleunigt. Berechnen Sie die kinetische Energie, die Gesamtenergie, die Masse, die Geschwindigkeit und den Impuls der Elektronen.

Lösungen:

1) Die Relativitätstheorien beruhen auf der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich groß ist, unabhängig davon, ob sie sich bewegen oder ob sie ruhen. In der speziellen Relativitätstheorie, die sich auf Körper bezieht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, treten folgende Effekte auf:
   a) Im bewegten System gehen die Uhren langsamer. Die Zeit wird gedehnt. Man spricht von Zeitdilatation.
   b) Körper erscheinen von einem bewegten Bezugssystem aus betrachtet in Bewegungsrichtung verkürzt. Man nennt diese Erscheinung Längenkontraktion.
   c) Masse und Energie sind proportional zueinander mit dem Proportionalitätsfaktor c^2 nach Einsteins berühmter Formel

   $$E = mc^2.$$

   Daher kann man Masse in Energie (Zerstrahlung) und Energie in Masse (Paarbildung) umwandeln.
   d) Die Masse nimmt mit der Geschwindigkeit zu.
   e) Geschwindigkeiten können nicht rein arithmetisch addiert werden. Die Summe zweier Geschwindigkeiten kann maximal die Lichtgeschwindigkeit c ergeben.
   f) In der allgemeinen Relativitätstheorie werden auch beschleunigte Bewegungen und Bewegungen im Gravitationsfeld berücksichtigt. Es treten zusätzliche Effekte auf. Die Raum-Zeit wird durch die Gravitation eines Körpers gekrümmt. Die Photonen werden im Gravitationsfeld abgebremst bzw. abgelenkt. Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist nicht mehr uneingeschränkt gültig. Es muss erweitert werden.
2) Zwei Versuche haben die Relativitätstheorie begründet, zum einen das Mitführungsexperiment von Fizeau und zum zweiten das Michelson-Morley-Experiment. Fizeau verglich die Lichtgeschwindigkeit in ruhendem Wasser mit der in schnell fließendem Wasser. Dabei stellte er fest, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig davon war, ob das Wasser ruhte oder sich bewegte. Das Licht wurde vom Wasser nicht mitgeführt, anders als ein Boot, das auf dem Wasser schwimmt. Michelson und Morley bestimmten mit einem Interferometer (s. Abb.1) die Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Erdrotation und senkrecht dazu. Dazu zerlegten sie durch einen halbdurchlässigen Spiegel einen Lichtstrahl, bei modernen Aufbauten einen Laserstrahl, in zwei Teilstrahlen, die sich senkrecht zueinander auf je einen Spiegel zu bewegten. Nach der Reflexion wurden beide durch den halbdurchlässigen Spiegel zum Teil zu einem Schirm abgelenkt, wo sie miteinander interferierten und ein Interferenzmuster ergaben je nach Gangunterschied zwischen den beiden Spiegeln. Drehten Michelson und Morley die Apparatur, so änderte sich das Muster nicht. Daraus folgerten sie, dass sich das Licht in Richtung der Erdrotation und senkrecht dazu mit gleicher Geschwindigkeit ausbreitet. Das Licht wird also von der Erdbewegung nicht mitgeführt, anders als ein Flugzeug, dass die Erdgeschwindigkeit beim Start mitnimmt bezogen auf das Weltall. Sie stellten keinen Unterschied fest.

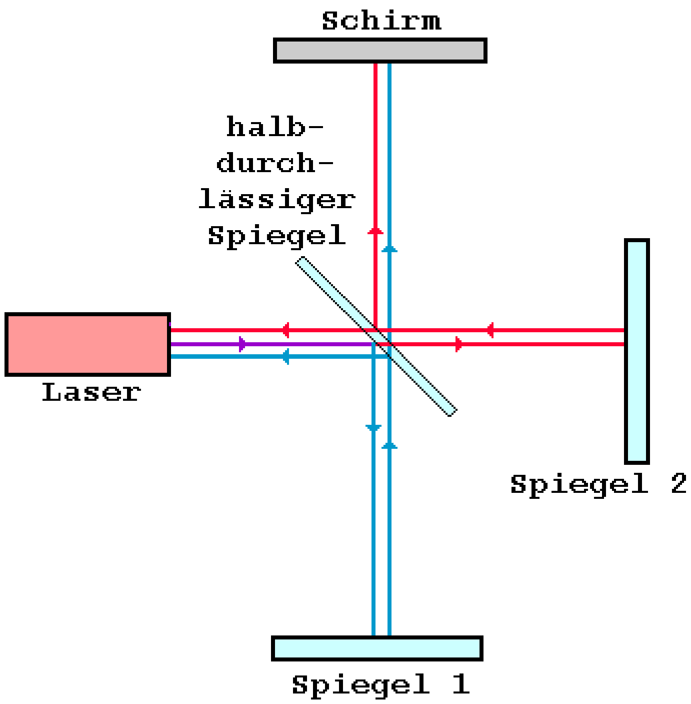


Abb.1: Michelson Interferometer

3) Mit Hilfe der Lorentztransformationen kann man Orts- und Zeitangaben von einem ruhenden Bezugssystem S in ein Bezugssystem S' umrechnen, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Legt man die x-Richtung in Richtung der Bewegung, so gelten folgende Umrechnungen, auch Lorentztransformationen genannt:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit besagt, dass der Lichtkegel, der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgeht, unabhängig vom Bewegungszustand des Bezugssystems stets einer Kugelschale entspricht. Mathematisch muss daher gelten:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (c * t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (c * t)^2.$$

Ersetzt man in obiger Gleichung die Angaben im bewegten System S' mit Hilfe der Lorentztransformationen, so erhält man mit

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$
$$= k^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2k^2(t - vx/c^2)^2$$
$$= k^2x^2 - 2k^2xvt + k^2v^2t^2 + y^2 + z^2 - c^2k^2t^2 + 2k^2vxt - k^2v^2x^2/c^2$$
$$= x^2k^2(1 - v^2/c^2) + y^2 + z^2 - t^2k^2(c^2 - v^2)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - t^2c^2(c^2 - v^2)/(c^2 - v^2)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

was zu beweisen war.

4) Es gelten folgende Gesetze:
a) Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12}v_{23}/c^2}$$

Darin bedeuten:

v_{13}: Geschwindigkeit des Körpers im System S
v_{23}: Geschwindigkeit des Körpers im System S'
v_{12}: Geschwindigkeit des Systems S' im System S.

b) Massenzunahme:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Darin bedeuten:

m: bewegte Masse
m_0: Ruhemasse
v: Geschwindigkeit der Masse

c) Längenkontraktion

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Darin bedeuten:

l_0: Länge des Körpers im Ruhesystem
l: Länge des Körpers im bewegten System
v: Geschwindigkeit des Körpers.

d) Zeitdilatation:

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Darin bedeuten:

t_0: Zeit im Ruhesystem
t: Zeit im bewegten System
v: Geschwindigkeit des bewegten Systems.

e) Äquivalenz Masse/Energie

$$E = mc^2.$$

Darin bedeuten:

E: Energie
m: Masse

f) Relativistische kinetische Energie

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2.$$

Darin bedeuten:

E_{kin}: kinetische Energie
m: bewegte Masse
m_0: Ruhemasse

In allen Formeln ist c die Lichtgeschwindigkeit.

5) Man benutzt die Lorentztransformationen aus Kapitel 3. Es gilt

$$\begin{aligned}
v_{13} &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{x_2' + v_{12}t_2' - (x_1' + v_{12}t_1')}{t_2' + v_{12}x_2'/c^2 - (t_1' + v_{12}x_1'/c^2)} \\
&= \frac{v_{12}(t_2' - t_1') + x_2' - x_1'}{t_2' - t_1' + v_{12}/c^2(x_2' - x_1')} \\
&= \frac{v_{12} + (x_2' - x_1')/(t_2' - t_1')}{1 + v_{12}/c^2 * (x_2' - x_1')/(t_2' - t_1')} \\
&= \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12}v_{23}/c^2}
\end{aligned}$$

Darin bedeuten:

v_{13}: Geschwindigkeit des Körpers im System S
v_{23}: Geschwindigkeit des Körpers im System S'
v_{12}: Geschwindigkeit des Systems S' im System S.

Setzt man
$v_{12} = v_1$
$v_{23} = v_2$.

so erhält man in den einzelnen Teilaufgaben folgende Gesamtgeschwindigkeiten:

a)
$$v_{13} = \frac{2c/3 + c}{1 + (2c/3) * c/c^2} = c.$$

b)
$$v_{13} = \frac{c + c}{1 + c * c/c^2} = c.$$

c)
$$v_{13} = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + (3c/4)^2/c^2} = 0{,}96c.$$

6) a) Wenn sich die Masse verdoppelt, so gilt nach dem Gesetz für die Massenzunahme:

$$m = 2m_0$$

und damit

$$2 * m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Daraus folgt:

$$v = c * \sqrt{1 - 1/4} = 0{,}866c = 2{,}6 * 10^8 m/s.$$

b) Das Elektron erhält seine relativistische kinetische Energie durch die Beschleunigungsspannung U. Daher gilt:

$$mc^2 - m_0{}^2 = e * U$$

und damit

$$U = (mc^2 - m_0c^2)/e = (2m_0c^2 - m_0c^2)/e = m_0c^2/e = 511{,}9keV.$$

c) Nach klassischer Rechnung gilt für die Geschwindigkeit:

$$1/2m_0v^2 = e * U$$

und damit

$$v = \sqrt{2 * e * U/m_0} = 4{,}24 * 10^8 m/s.$$

Nach der Relativitätstheorie ist das nicht möglich.

7) Für die Länge im anderen System gilt:

$$l = l_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$= 10m * \sqrt{(1 - (2/3c)^2/c^2} = 10m * \sqrt{(1 - (2/3)^2} = 7{,}45m$$

und damit

$$\Delta l = l_0 - l = 10m - 7{,}45m = 2{,}55m.$$

Für die Zeit im anderen System gilt:

$$t = t_0 * \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$= 10s * \sqrt{1 - (2/3c)^2/c^2} = 10s * \sqrt{1 - (2/3)^2} = 7{,}45s$$

und damit

$$\Delta t = t - t_0 = 10s - 7{,}45s = 2{,}55s.$$

8) Da die Satelliten jahrelang um die Erde kreisen, würden ihre Borduhren immer mehr von den Uhren am Boden abweichen, da die Zeitdilatation aufgrund der Geschwindigkeit mit der Flugzeit zunimmt, ebenso die Zeitkontraktion, verursacht durch die Gravitation der Erde. Daher müssen die Uhren mit Funksignalen in regelmäßigen Abständen neu synchronisiert werden. Denn Abweichungen der Uhren im Nanosekundenbereich verursachen durch die Lichtgeschwindigkeit der Funksignale bereits Abweichungen im Meterbereich bei der Positionsbestimmung.

9) Für die Zeitdilatation aufgrund der Fluggeschwindigkeit gilt:

$$\Delta t = \frac{1}{2} * t_0 * \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} * 4{,}32 * 10^4 s * \frac{(2{,}5 * 10^2 m/s)^2}{(3 * 10^8 m/s)^2} = 15ns.$$

Für die Zeitkontraktion durch die verminderte Gravitation erhält man:

$$\Delta t = \frac{g * \Delta h * t_0}{c^2} = \frac{9{,}81 m/s^2 * 10000 m * 12 * 3600 s}{(3 * 10^8 m/s)^2} = 47{,}1 ns.$$

Damit ist der Mensch beim Flug um

$$\Delta t = 47{,}1 ns - 15 ns = 32{,}1 ns$$

schneller gealtert als ein Mensch auf der Erde.

10) Für die kinetische Energie der Elektronen gilt:

$$E_{kin} = e * U = 1{,}602 * 10^{-19} C * 1 * 10^8 V = 1{,}602 * 10^{-11} J.$$

Damit erhält man für ihre Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + m_0 * c^2 \\ &= 1{,}602 * 10^{-11} J + 9{,}1 * 10^{-31} kg * (3 * 10^8 m/s)^2 \\ &= 1{,}6102 * 10^{-11} J. \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich die Masse m zu:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1{,}6102 * 10^{-11} J}{(3 * 10^8)^2} = 1{,}789 * 10^{-28} kg.$$

Die Geschwindigkeit kann man mit Hilfe der Lösung zu Aufgabe 6 wie folgt berechnen:

$$v = c * \sqrt{1 - (m_0/m)^2} = 0{,}999987 * c.$$

Den Impuls kann man auf zweierlei Art ermitteln, entweder in dem man seine Definitionsgleichung anwendet oder in dem man die Formel aus Kapitel 9 benutzt. Mit der ersten Methode erhält man:

$$\begin{aligned} p &= m * v \\ &= 1{,}789 * 10^{-28} kg * 0{,}999987 * 3 * 10^8 m/s \\ &= 5{,}367 * 10^{-20} Hy. \end{aligned}$$

Der zweite Rechenweg liefert das gleiche Ergebnis.

13. Anmerkungen

Interessant ist die geschichtliche Entwicklung, die zur Relativitätstheorie geführt hat. Im 19. Jahrhundert gab es zwei große Theoriegebäude der Physik, die Newtonsche Mechanik und die Maxwellsche Elektrodynamik. Die erste erfüllte das Gallileische Relativitätsprinzip, dass besagt, dass sich Geschwindigkeiten in einem absoluten raumzeitlichen Umfeld additiv verhalten und sich die Gesetze nicht ändern, wenn man sie von einem Inertialsystem aus betrachtet, dass sich mit der Geschwindigkeit v gegenüber einem ruhenden System bewegt. Die Maxwellsche Theorie erfüllte diese Bedingung nicht. In ihr erzeugen ruhende Ladungen elektrische Felder und bewegte magnetische Felder. Wechselt man aus dem Ruhesystem ins bewegte System, so treten folglich völlig andere Erscheinungen auf, aus einem elektrischen Feld wird ein magnetisches Feld, das zudem nicht geschlossen wäre, sondern offen, was einer Grundaussage der Maxwellschen Theorie vollkommen widerspricht. Einstein löste das Problem, in dem er die Maxwellschen Gesetze für alle Inertialsysteme als absolut allgemeingültig erklärte und das Gallileische Relativitätsprinzip dahingehend abwandelte, dass es die Maxwellschen Gleichungen erfüllte. Dazu ersetzte er die Gallileischen Transformationsgleichungen durch die Lorentztransformationen, die zuvor schon von dem Physiker H.A. Lorentz formuliert worden waren. Außerdem musste er annehmen, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen absolut gleich ist. Dafür spricht die Tatsache, dass sie sich im Vakuum aus zwei Naturkonstanten, der elektrischen und magnetischen Feldkonstante berechnen lässt. Der absolute Raum und die absolute Zeit als Grundlage der Newtonschen Mechanik verloren ihre Gültigkeit und mussten relativiert werden. Das hinwiederum hatte zur Folge, dass die Newtonschen Bewegungsgesetze angepasst werden mussten. Vor allem ist die Masse nicht mehr konstant, sondern hängt von der Geschwindigkeit ab. Alle Gesetze, die sie enthalten, mussten folglich umformuliert werden, u.a. der Energiesatz und das Gravitationsgesetz. Heraus kam ein sehr komplexes mathematisches Gebilde, das sehr unanschaulich ist und in der Praxis nur von mathematischen Experten angewendet werden kann. Was bitte soll man sich unter vierdimensionaler Raumkrümmung vorstellen? Außerdem hat sich gezeigt, dass 99% des Raumes im Weltall nicht gekrümmt, sondern flach sind und sich somit sehr gut mit den Newtonschen Vorstellungen beschreiben lassen [5)]. Um die Probleme bei der Einführung der Relativitätstheorie zu veranschaulichen, erzähle ich meinen Schülerinnen und Schüler gerne folgendes Beispiel. Jemand will anhand eines Gummibandes das Hookesche Gesetz überprüfen. Bei kleinen Kräften stellt er fest, dass die Auslenkung der Feder proportional zur angreifenden Kraft, die Federhärte als Quotient aus Kraft und Auslenkung folglich konstant ist. Bei stärkeren Kräften treten bei der Messung erhebliche Abweichungen auf, die Federhärte hängt von der angelegten Kraft ab. Jeder normal denkende Physiker würde daraus folgern, dass das Hookesche Gesetz in seiner einfachen Form nur für kleine Kräfte gültig ist und es für größere entsprechend angepasst werden muss. Niemand käme ernsthaft auf die Idee, die Definitionen der beteiligten Größen Kraft und Auslenkung in Frage zu stellen, die sich bei anderen Gesetzen bestens bewährt haben. Aber genau das hat Einstein getan als er die Relativitätstheorie formulierte. Kein Wunder also, dass seine Vorstellungen auf sehr heftigen Widerstand seitens der Physikergemeinde stießen, hatten sich doch die Newtonschen Bewegungsgesetze bis dahin in vielen Erfahrungsbereichen bestens bewährt. Es bleibt die Frage, ob es nicht der bessere Weg gewesen wäre, die Maxwellschen Gesetze anzupassen, anstatt die Grundlagen der gesamten Physik auf den Kopf zu stellen. Aber die Geschichte hat einen anderen Verlauf genommen. Es folgen einige kritische Anmerkungen zur Relativitätstheorie, denn sie ist meiner Meinung nach keineswegs in sich schlüssig, widerspruchsfrei und alternativlos.

Beschäftigt man sich mit der Relativitätstheorie anhand diverser Lehrbücher einschließlich der Originalableitungen Einsteins, so verstrickt man sich leicht im Bezugssystemdschungel. Einstein bezeichnet die beiden Bezugssysteme, die immer wieder verglichen werden müssen mit k und K, andere Autoren verwenden S und S‘, wieder andere S_0 und S. Dabei verliert man leicht den Überblick. Ich habe versucht, die Größen konsequent mit dem Index 0 für das ruhende System und ohne Index für das bewegte System durchzuhalten.

Bei näherer Betrachtung tritt in Einsteins Ableitung der Gesetze ein Widerspruch auf. Transformiert man die Länge l und die Zeit t vom System S ins System S_0, so gilt:

$$\begin{aligned} t &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{\left(t_{02} - \frac{v}{c^2} x_0\right) - \left(t_{01} - \frac{v}{c^2} x_0\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{t_{02} - t_{01}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für t_0

$$t_0 = t * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Analog erhält man für die Längenkontraktion

$$l_0 = l * \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

So weit so gut. Von jedem System aus erscheint der Stab im anderen System verkürzt bzw. die Zeit verlängert. Problematisch wird es, wenn man während der Herleitung eines Gesetzes oder der Beschreibung eines zeitlichen Ablaufes offen oder verdeckt einen Perspektivwechsel von einem System ins andere vornimmt, wie es Einstein unbewusst bei der Ableitung der Formel für die Kraft getan hat (s. Kapitel 7). Vollzieht man diesen Bezugssystemwechsel vom System S ins System S_0 nicht, sondern wendet konsequent die Gesetze für die Zeitdilatation und die Längenkonzentration an, so erhält man für die Kraft in Bewegungsrichtung (vgl. Kapitel 7)

$$F = \frac{F_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Integriert man diese Formel über den Weg bzw. die Zeit, so erhält man für die kinetische Energie E und den Impuls p folgende Formeln

$$E = m_0 * c^2 * \left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$$

$$p = m_0 * c * arscin(v/c).$$

Die Energieformel liefert für den Fall v = c ihren Maximalwert

$$E = m_0 * c^2.$$

Die kinetische Energie einer Masse kann nicht unendlich groß werden, sondern maximal gleich der Einsteinschen Ruheenergie. Das erscheint mir physikalisch unmittelbar einsichtig, da sie ihren höchsten Wert erreichen sollte, wenn die Geschwindigkeit am größten ist. Sie könnte diesen Wert übersteigen, wenn sich die Massen mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen würden. Ein Teil ihrer kinetischen Energie wäre imaginär, physikalisch nicht messbar, dunkel. Ebenso wenig könnte man die Position der Massen und ihre gegenseitigen kausalen Wechselwirkungen bestimmen, wenn sie mit Überlichtgeschwindigkeit vernetzt wären. Die genaue Messung beider Eigenschaften setzt voraus, dass die Geschwindigkeit, mit der sie Signale austauschen, nicht größer ist als die Geschwindigkeit der Messsignale. In der Physik ist das in aller Regel die Lichtgeschwindigkeit. Diese Überlegung habe ich in meinem Skript zur Quantenmechanik näher untersucht. Wir leben in einer elektromagnetischen Blase und zwar permanent in der Vergangenheit. Wenn die Signale bei uns eintreffen, sind die Ereignisse, die sie erzeugt haben, schon Schnee von gestern. Und wir meinen, es könnte außerhalb dieser Blase nichts geben. Auch für den Fall, dass $v \ll c$ ist, liefert die Formel das klassische Ergebnis für die kinetische Energie, wie die Reihenentwicklung der Formel zeigt. Für den Impuls erhält man im Falle v = c den Wert

$$p = m_0 * c * \pi/2$$

und für $v \ll c$ den klassischen Wert

$$p = m * v.$$

Welche seltsamen Blüten ein solcher Bezugssystemwechsel treiben kann, zeigt das folgende kleine Gedankenexperiment. Ein Beobachter A fliegt mit der Geschwindigkeit v auf einen ruhenden Beobachter B zu. Auf seiner Uhr A vergehen t = 2 s, auf der Uhr B des ruhenden Beobachters t_0 = 4 s. Begegnen sich die beiden, so wechseln die Beobachter die Perspektive. Damit wird System A zum Ruhesystem und System B zum bewegten System. Beobachter B fliegt mit seiner Uhr in entgegengesetzte Richtung davon bis er den Ort erreicht, wo zuvor Beobachter A gestartet ist. Bei der Rückreise vergehen auf der Uhr des Beobachters B zusätzlich t = 2 s, auf der Uhr des Beobachter A t_0 = 4 s. Beide Uhren zeigen am Ende die gleiche Zeit t = 6 s an. Fliegt dagegen der Beobachter A an Beobachter B vorbei weiter ohne Perspektivwechsel bis er rechts von Beobachter B gleich weit von diesem entfernt ist wie zu Beginn links von B, so zeigen beide Uhren unterschiedliche Zeiten an, die Uhr A t = 4 s, die Uhr B t_0 = 8 s. Im ersten Fall kann man eine für beide Bezugssysteme gleiche und damit bezugssystemunabhängige Zeit definieren. Dafür spricht auch die Tatsache, dass es Lorentz invariante Größen wie die Wirkung gibt. Mit ihrer zeitlichen Änderung könnte man eine bezugssystemübergreifende, absolute Zeit definieren. Uhren ließen sich so in verschiedenen Bezugssystemen sehr viel einfacher, präziser und effektiver synchronisieren als über den Austausch von Lichtsignalen. Einstseins Gedankenexperiment mit Lichtuhren lässt sich in der Praxis nur schwer durchführen, da man zwei Vakuum-Bezugssysteme benötigt. Jedes Zwischenmedium wie Luft oder die elektrischen Leitungen im Sender und Empfänger beeinträchtigt die Laufzeit des Signals und erschwert damit die Synchronisation. Diese Störungen müssen bei der Ortung mit GPS-Systemen kompensiert werden, damit eine genaue Positionsbestimmung überhaupt möglich ist. Auch auf der Erde werden Uhren an verschiedenen Orten nicht über Lichtsignale synchronisiert, sondern über eine genaue Festlegung der Grundeinheit der Zeit, der Sekunde. Sie ist definiert als die Dauer von n = 9.192.631.770 Perioden der Strahlung des Atoms Cäsium 133, die beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus im Grundzustand ausgesandt wird. Eine solche Cäsium-Atomuhr bildet die Grundlage des DCF-Funksignals, mit dem die Funkuhren synchronisiert werden. Dabei wird die Zeitinformation durch ein codiertes Signal mit Langwellen übertragen, wobei die Laufzeit des Signals nicht von Bedeutung ist (s. Skript „Schwingquarze" auf dieser Webseite).

Wenn man wie Einstein die Gravitationskraft als Raumzeitkrümmung deutet, muss man konsequenterweise auch alle anderen Kräfte entsprechend uminterpretieren. Ansonsten kann die Gravitationskraft andere Kräfte nicht verstärken oder kompensieren, wie etwa die elektrische Kraft in einem Kondensator oder die Kernkraft in einem Neutronenstern. Die Physik verliert den letzten Rest an Anschaulichkeit und mutiert zu einem komplexen mathematischen Gebilde. Sie kann nur noch von wenigen verstanden und von noch weniger Personen angewendet werden, um Probleme zu lösen.

Auch in der Newtonschen Mechanik ist Gleichzeitigkeit selbst in ein und demselben Bezugssystem ein relativer Begriff, wenn Informationen mit Lichtsignalen übertragen werden bzw. der Raum damit vermessen wird. Informationen über Ereignisse, die sich zu unterschiedlichen Zeiten an verschiedenen Orten zu getragen haben, erscheinen einem Beobachter als gleichzeitig, wie im Folgenden erläutert wird. Informationen über Ereignisse, die zur Zeit t' bzw. t auf Kugelschalen mit dem Radius r' bzw. r stattgefunden haben (s. Abb.1), erreichen den Beobachter B_1 im Kugelmittelpunkt zur gleichen Zeit, wenn gilt

$$r' - c * t' = r - c * t$$

und damit

$$t' = t + \frac{r' - r}{c}.$$

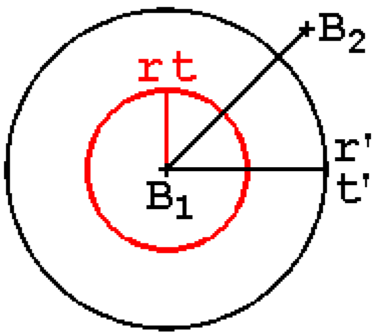


Abb.1: Gleichzeitigkeit

Für den Beobachter B_2 und viele andere Beobachter sind sie offensichtlich nicht gleichzeitig, da die Informationen sie zu unterschiedlichen Zeiten erreichen. Die Probleme entstehen durch die endliche Geschwindigkeit des Lichtes. Ein Beispiel soll die Überlegungen verdeutlichen. Stehe ich auf, während die Sonne am Horizont aufgeht, so kommt es mir vor, als würde beides gleichzeitig geschehen. In Wirklichkeit ist die Sonne bereits vor 500 Sekunden aufgegangen, weil das Licht für die Strecke Sonne-Erde diese Zeit benötigt. Für einen Beobachter auf dem Jupiter erscheint sie dagegen zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt am Horizont je nach momentaner Stellung der beiden Planeten zur Sonne.

Zu Beginn seiner Abhandlungen zur speziellen Relativitätstheorie stellt Albert Einstein[2)] folgendes Gedankenexperiment an. Am Anfang eines Stabes der Länge l befindet sich eine Lichtquelle L und eine Uhr, am Ende ein Spiegel. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ sendet die Lichtquelle einen Lichtstrahl aus. Gleichzeitig startet die Uhr. Der Lichtstrahl wird am Spiegel reflektiert und kehrt zum Anfang des Stabes zurück. In diesem Augenblick stoppt die Uhr. Er benötigt für den Hin- bzw. Rückweg die Zeit

$$t = \frac{l}{c} \ (1).$$

Eine zweite Uhr wird aufgestellt und mit der ersten synchronisiert. Sie bleibt bei der folgenden Überlegung in Ruhe. Die erste Uhr und der Stab samt Lichtquelle und Spiegel werden in Bewegung gesetzt mit der Geschwindigkeit v. Für einen Beobachter in dem bewegten System S bleibt alles beim Alten. Er misst zwischen dem Start und der Ankunft des Lichtsignales die gleiche Zeit wie im 1. Versuch, da alle Bezugssysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen gleichwertig sind, da es sich um Inertialsysteme handelt. Der Beobachter im nicht bewegten System S_0 misst jedoch für den Vorgang unter Berücksichtigung des Prinzips, dass die Lichtgeschwindigkeit die höchste Signalgeschwindigkeit und in jedem Bezugssystem gleich groß ist, folgende Zeit t_0

$$t_0 = t_{01} + t_{02} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \ (2)\,.$$

Darin ist t_{01} die Zeit für den Hinweg und t_{02} die Zeit für den Rückweg. Bringt man die Summe in Gleichung 2 auf einen Nenner und berücksichtigt Gleichung (1), so erhält man

$$t_0 = \frac{2c * l}{c^2 - v^2} = 2 * t * \frac{c^2}{c^2 - v^2} = 2 * t * \frac{1}{1 - v^2/c^2} = 2 * t * k^2,$$

mit k als relativistischem Faktor in den Lorentztransformationen (s. Kapitel 3). Ein k rührt von der Zeitdilation, eins von der Längenkontraktion her. Der Beobachter im System S_0 misst für den Vorgang eine größere Zeit als der Beobachter im System S, da der zusätzliche Faktor größer als 1 ist. Um das Relativitätsprinzip zu retten, schlägt Hendrik Lorentz vor, der das Phänomen als erster an bewegten Elektronen untersucht hat, dass der bewegte Stab vom System S_0 aus verkürzt erscheint oder die Zeit im System S langsamer abläuft als im System S_0. Einstein hat diese Argumentation übernommen und für beliebige physikalische Vorgänge verallgemeinert und daraus die oben diskutierten Erscheinungen abgeleitet. Meiner Meinung nach greift die physikalische Erklärung von Lorentz und Einstein zu kurz. Man muss zwischen Hin- und Rückweg unterscheiden. Auf dem Hinweg eilt das Ende des Stabes und damit der Spiegel dem Lichtsignal (blauer Pfeil) (s. Abb.2) voraus. Dieser muss daher bezogen auf das System S_0 einen längeren Weg

$$s_{01} = l + v * t$$

zurücklegen bis er den Spiegel erreicht. Auf dem Rückweg kommt der Anfang des Stabes und damit die Lichtquelle L dem Lichtstrahl entgegen, so dass er nur einen kleineren Weg

$$s_{02} = l - v * t$$

zurücklegen muss, bis er bei L eintrifft. Außerdem müssen die Geschwindigkeitsangaben für den Hin- und Rückweg vertauscht werden. Auf dem Hinweg bewegt sich der Lichtstrahl bezogen auf S mit c, bezogen auf S_0 folglich mit

$$v_1 = c + v$$

auf dem Rückweg entsprechend mit

$$v_2 = c - v$$

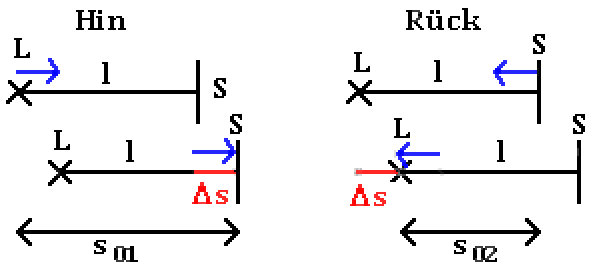


Abb.2: Hin- und Rückweg des Lichtstrahles

Für die Analyse nach Einstein und Lorentz hat das keinen Einfluss auf die Zeit t_0, da die beiden Summanden nur vertauscht werden. Insgesamt ergibt sich für t_0

$$t_0 = \frac{s_{01}}{c + v} + \frac{s_{02}}{c - v} = \frac{l + v * t}{c + v} + \frac{l - v * t}{c - v}.$$

Mit Gleichung (1) erhält man insgesamt

$$t_0 = 2t.$$

Für den gesamten vom Lichtstrahl zurückgelegten Weg gilt bezogen auf das System S_0:

$$s_0 = (c + v) * t + (c - v) * t = 2 * c * t = c * t_0.$$

Eine Zeitdilatation oder Längenkontraktion ist nicht nötig, um die Erscheinungen zu erklären. Erreicht die Geschwindigkeit v Lichtgeschwindigkeit c, so hat das auf den Hinweg keinen Einfluss, bei der Reflexion des Lichtstrahls am Spiegel hört er für den Beobachter in S_0 allerdings auf zu existieren, da seine Geschwindigkeit auf 0 sinkt. Längenbestimmung und Zeitmessung mit Lichtstrahlen sind für den Beobachter in S_0 am bewegten Stab nicht mehr möglich. Er entzieht sich dessen Beobachtung, wird unsichtbar zur dunklen Materie. Trotzdem existieren Zeit und Länge noch, denn für den mitbewegten Beobachter im System S ändert sich nichts. Nach der Einstein-Lorentzschen Interpretation würde der Stab auf eine Länge von Null schrumpfen und die Zeit bliebe stehen, wenn die Geschwindigkeit v sich der Lichtgeschwindigkeit c nähert. Das ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation gar nicht möglich, auch wenn der Impuls und die Energie dann unendlich groß werden. Vorher wäre der Stab zum Quantenschaum oder treffender zur Quantenhölle mutiert, fragt sich nur durch welche Kraft, jedenfalls nicht durch die Gravitation wie die Materie in einem schwarzen Loch. Wendet man die obigen Überlegungen auf das Michelson-Morley-Experiment an, so erhält man in beiden Bezugssystemen die gleiche Zeit, die der Lichtstrahl für den Hinweg von der Lichtquelle zum Spiegel bzw. für den Rückweg vom Spiegel zum Empfänger benötigt, völlig unabhängig davon, ob die Apparatur sich bewegt oder ruht. Das gilt somit auch für die gesamte Flugzeit des Lichtstrahles. Michelson und Morley konnten folglich keine Interferenzerscheinungen beobachten. Dieses Ergebnis folgt aus der Annahme, dass die Geschwindigkeit des Lichtes wie beim Schall von der Geschwindigkeit der Quelle abhängt, was Einstein in seinen Überlegungen auch angewendet hat (s. Gleichung 2). Er postulierte nur zusätzlich die Lichtgeschwindigkeit als höchstmögliche Signalgeschwindigkeit. Allerdings gibt es einen gewaltigen Unterschied zwischen beiden Wellenausbreitungen. Schall benötigt Luft als Medium. Sie ist damit das Bezugssystem der Geschwindigkeit. Licht braucht kein Medium, um sich auszubreiten. Einen Äther gibt es nicht. Das Bezugssystem fürs Licht ist der luftleere Weltraum, ein als ruhend anzusehendes Bezugssystem. Wendet man diese Überlegungen auf die Myonen in der Atmosphäre an, so lassen sich die Beobachtungen wie folgt erklären. Die Myonen brauchen keine Zeitdilatation und Längenkontraktion, um zur Erde zu gelangen. Die vier Prozent von ihnen, die die Erdoberfläche erreichen, sind der statistische Ausläufer der Gaußschen Geschwindigkeitsverteilung der Myonen, die mit Überlichtgeschwindigkeit unterwegs sind und so in ihrer eigenen Halbwertszeit bis zur Erdoberfläche fliegen können. Sollte sich diese Annahme bestätigen, so hätte sie, wie im Skript zur Quantenmechanik auf dieser Webseite bereits dargelegt, weitreichende Konsequenzen für das Kausalitätsprinzip. Nicht immer ließen sich die wirklichen kausalen Zusammenhänge zweier Ereignisse erkennen, solange man sie nur mit Lichtgeschwindigkeit beobachten kann. Die wirkliche Ursache-Wirkung-Beziehung zwischen den Ereignissen würde davon jedoch nicht berührt. Aber wie immer ist das Experiment die letzte Instanz in der Physik, die darüber entscheidet, ob die theoretischen Überlegungen wahr oder falsch sind.

In der Einleitung zu seinen Untersuchungen schreibt Albert Einstein [2)]: „Daß die Elektrodynamik Maxwells – wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt – in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheint, ist bekannt. Man denke z.B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind.“ Er führt weiter aus, dass bei ruhendem Leiter in diesem ein elektrisches Feld entsteht, das einen Induktionsstrom erzeugt, bei ruhendem Magneten dagegen im Leiter die Lorentzkraft den Induktionsstrom bewirkt. Diese Asymmetrie existiert meiner Meinung nach in Wirklichkeit nicht, wenn man die Induktionserscheinungen mit Hilfe der Änderung des magnetischen Flusses erklärt. Dann spielt es keine Rolle, ob sich der Leiter oder der Magnet bewegt.

Ein weiterer Widerspruch ergibt sich, wenn man die Überlegungen der Relativitätstheorie auf Photonen anwendet. Als Teilchen sind sie im zeit- und raumlosen Blindflug unterwegs, da sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Sie können nach der Zeitdilatation in einer Eigenzeit von t = 0 s und nach der Längenkontraktion bei einer Eigenstrecke s = 0 m beliebig weit und lange fliegen, bezogen auf das Laborsystem. Andererseits weisen sie als Welle eine zeitliche und räumliche Periode auf, eine Frequenz und eine Wellenlänge. Sie verleihen dem elektrischen und magnetischen Feld eine räumliche und zeitliche Struktur. Wie können eine Zeit von t = 0 s und eine Strecke von s = 0 m strukturiert sein? Ist die Natur wirklich so paradox konstruiert oder fehlen uns nur die entscheidenden Ideen für eine anschauliche Deutung der Erscheinungen? Fragen über Fragen und neue Lösungsvorschläge sind gesucht. Ein ähnliches Paradoxon ergibt sich, wenn man versucht, die Gravitationskraft, für die die Allgemeine Relativitätstheorie gilt, mit den anderen fundamentalen Kräften, die durch die Quantenmechanik beschrieben werden, zu vereinheitlichen. Man stößt auf Unendlichkeiten, die sich nur durch einen mathematischen Trick vorübergehend beheben lassen, mathematisch als Renormierung bezeichnet. Außerdem ist der Raum flach, wie von der Quantentheorie gefordert und nicht gekrümmt, wie die Allgemeine Relativitätstheorie vorhersagt, zumindest in dem Teil des Raumes, den wir sehen können. Dessen Krümmung liegt mit einer Fehlerspanne von 0,4 % nahe bei null. [5)]

Ferner sei die Frage erlaubt, ob Lichtsignale das probate Mittel sind, um die Position und die Geschwindigkeit eines Körpers zu bestimmen, der sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegt. Wenn man die Position und die Geschwindigkeit eines Flugzeuges messen will, das mit Schallgeschwindigkeit fliegt, sind Schallsignale jedenfalls nicht geeignet, wie jeder am Himmel beobachten kann. Das Flugzeug befindet sich an einem völlig anderen Ort, an dem man es hört. Man muss Lichtsignale benutzen, deren Geschwindigkeit um ein Vielfaches höher ist als die Geschwindigkeit des Flugzeuges.

Beim Zwillingsparadoxon stellt sich außerdem die Frage, ob sich biologische und chemische Alterungsprozesse an die durch Lichtsignale definierte Lichtzeit halten. Oder haben sie ihr eigenes Zeitverhalten?

Ich bezweifle, dass die Grundannahme Einsteins, die Lichtgeschwindigkeit sei unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle richtig ist. Wenn ich mit einem Schwingkreis eine EM-Welle erzeuge und dabei den Schwingkreis bewege, so ändert sich der magnetische Fluss der Schwingkreisspule nicht nur aufgrund der Schwingung, sondern auch durch ihre Bewegung. Diese zusätzliche Änderung induziert nach dem Induktionsgesetz ein elektrisches Feld E_1, für das je nach Bewegungsrichtung gilt:

$$E_1 = \pm\, v^*B\,.$$

Es überlagert sich dem durch die Schwingung erzeugten elektrischen Feld E_0, so dass man für das E-Feld E insgesamt erhält:

$$E = E_0 \pm E_1 = E_0 \pm v * B$$

Für die Geschwindigkeit der EM-Welle gilt definitionsgemäß:

$$c = \frac{E}{B}$$

und damit:

$$c = \frac{E_0 \pm v * B}{B} = c_0 \pm v$$

Darin c_0 die Geschwindigkeit der EM-Welle bei ruhendem Schwingkreis. Die Geschwindigkeit des Schwingkreises überträgt sich somit auf die EM-Welle, womit sich die obigen Überlegungen voll bestätigen würden. Ob diese Überlegungen richtig sind, ließe sich mit modernen Messuhren mit dem folgenden Versuch überprüfen.

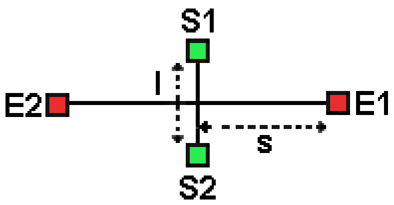


Abb.3: Versuch

Auf den Spitzen eines Metallstabes der Länge l werden zwei EM-Quellen S_1 und S_2 installiert (s. Abb. 3). Der Stab wird in Rotation versetzt. In einer Entfernung s stellt man auf der Mittelsenkrechten des Metallstabes zwei Empfänger E_1 und E_2 auf. Jedes Mal, wenn der Stab l und die Mittelsenkrechte s genau senkrecht aufeinander stehen, senden die beiden EM-Quellen einen kurzen EM-Impuls aus. Da sich die EM-Quelle auf der einer Seite des Stabes vom Empfänger weg und auf der anderen Seite auf ihn zu bewegt, müssten in beiden Empfängern die zwei Lichtsignale mit einer Zeitdifferenz Δt eintreffen, wenn die Geschwindigkeit der EM-Welle von der Bewegungsgeschwindigkeit der Quelle abhängt. Anderenfalls müssten beide EM-Impulse gleichzeitig die Empfänger erreichen. Für den Zeitunterschied gilt:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{s^2 + \frac{l^2}{4}}}{c - v} - \frac{\sqrt{s^2 + \frac{l^2}{4}}}{c + v}.$$

Der Zeitunterschied beträgt für l = 1 m, s =10 m und v = 100 m/s

$$\Delta t = \frac{\sqrt{100m^2 + \frac{1m^2}{4}}}{3 * 10^8 m/s \ - 100m/s} - \frac{\sqrt{100m^2 + \frac{1m^2}{4}}}{3 * 10^8 m/s + 100m/s} = 2{,}23^{-14} s\ .$$

Ob man ihn mit moderner Messtechnik überhaupt messen könnte, kann ich nicht beurteilen. Ansonsten müsste man s, l und v entsprechend anpassen, um messbare Zeitunterschiede zu erhalten.

Wenn Einsteins Annahme richtig ist, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle ist, müsste zudem ein Lichtstrahl, der senkrecht zur Bewegungsrichtung eines bewegten Bezugssystems ausgestrahlt wird, eine seitliche Abweichung entgegen der Bewegungsrichtung des Bezugssystems erfahren. Während sich das Bezugssystem weiter bewegt, behält der Lichtstrahl seine Richtung bei (s. Abb. 4). Diese Vermutung ließe sich anhand eines Versuches überprüfen. Sender S und Empfänger E sind durch einen Stab der Länge l fest miteinander verbunden. Die Anordnung bewegt sich nach rechts mit der Geschwindigkeit v. Zu einem genau festgelegten Zeitpunkt t_0 strahlt der Sender eine EM-Welle aus. Sie trifft nach der Zeit t_1 auf den Empfänger. Die linke Ansicht stellt die Bewegung des Strahls aus Sicht des Ruhesystems dar, die rechte aus Sicht des bewegten Systems. Der blaue Pfeil entspricht dem Verlauf des Strahls, wenn seine Geschwindigkeit unabhängig von der Bewegung der Quelle ist, der rote, wenn sich die Geschwindigkeit der Quelle auf den Strahl überträgt. Der Weg s, um den sich Sender und Empfänger in der Zeitdifferenz

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

weiterbewegt hat, beträgt für eine Entfernung des Senders vom Empfänger l = 10 m und die Geschwindigkeit des Bezugssystems v = 100 m/s

$$s = v * \Delta t = v * \frac{l}{c} = 100m/s * \frac{10m}{3 * 10^8\, m/s} = 3{,}33 * 10^{-6} m\,.$$

Eine solche Abweichung müsste messbar sein.

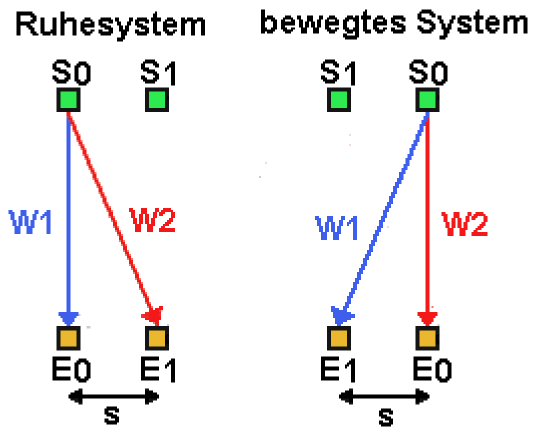


Abb. 4: Versuch 2

14. Literatur

1) Prof. Dr. Dr. Horst Melcher: Sinn und Bedeutung der Speziellen Relativitätstheorie, erschienen in Praxis der Naturwissenschaften Physik in der Schule, Heft 4/45, Köln Juni 2005
2) H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski: Das Relativitätsprinzip, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1974
3) J. Grehn, J. Krause (Hrsg.), Metzler Physik, Schroedel-Verlag, Hannover 1998
4) Dorn-Bader, Physik Gymnasium SEKII, Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig 2010
5) Jorge Chaim, Daniel Whiteson: no idea, was wir noch nicht wissen, Bertelsmann-Verlag München 2018, S.140
6) Kip S. Thorne, Gekrümmter Raum und verbogene Zeit, Weltbild Verlag, Augsburg 2000
7) J.Grehn, J. Krause: Metzler Physik, Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig 2007 S. 373
8) Franz Bader: Formeln und Tabellen zur Schulphysik, Aulis Verlag Deubner GmbH & Co KG, Köln 1967
9) E. W. Schpolski: Atomphysik Band 1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976
10) Bergmann Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik Band II Elektrizität und Magnetismus, Berlin 1971, S. 371
11) Günter Spanner, Das Geheimnis der Gravitationswellen, Franckh-Kosmos Verlags-GmbH & Co. KG, Stuttgart 2018
12) dtv-Lexikon der Physik, Band 5 Stichwort: Krümmung der Lichtstrahlen, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH &Co. KG, München 1970,
13) Albrecht Fölsing, Albert Einstein, Eine Biographie, Suhrkamp- Verlag, Frankfurt am Main, 1993